Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті

ӘОЖ 517.968(043) Қолжазба құқығында

Каракенова Саяхат Габлетовна

Фредгольм интегралдық және дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шектік есептерін параметрлеу әдісімен шешу

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер:

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Джумабаев Д.С.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Жуматов С.С.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Станжицкий А.Н.

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2023

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды:

ҚР СОСЕ 5.04.034-2011. Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістер). Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері.

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен ережелер.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ – $[0,T]$ аралығында үзіліссіз $x\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$ функциясының кеңістігі және нормасы $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$, $\|x\|=\max\limits_{i=\overline{1,N}}|x_i|$;

$\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$ – $[0,T]$ аралығында компоненттері $u_r:[t_{r-1},t_r)\to\mathbb{R}^n$ үзіліссіз және барлық $r=\overline{1,N}$ үшін ақырлы жол жақты шектері $\lim\limits_{t\to t_r-0}u_r(t)$ болатын $u[t]=\big(u_1(t),u_2(t),\dots,u_N(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігі, нормасы $\|u[\cdot]\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|u_r(t)\|$;

$\tilde{\mathbb{C}}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$ – $[0,T]$ аралығында барлық $r=\overline{1,N}$ компоненттері $v_r:[t_{r-1},t_r]\to\mathbb{R}^n$ үзіліссіз $v[t]=\big(v_1(t),v_2(t),\dots,v_N(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігі, нормасы $\|v[\cdot]\|_3=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|v_r(t)\|$

КІРІСПЕ

Диссертациялық жұмыстың жалпы сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бастапқы және шеттік есептердің сапалық қасиеттерін зерттеуге және қарастырылып отырған есептерді шешуге арналған.

Зерттеудің өзектілігі бір жағынан, жаратылыстану есептерін шешуде интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің көптеген қолданыстарына, екінші жағынан, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес есептердің шешімділігін тиімді анықтауға және олардың шешімдерін табуға мүмкіндік беретін жаңа конструктивті әдістерді дамыту қажеттілігіне байланысты.

Өткен ғасырдың басында В. Вольтерра [1,2] кейінгі әсер ету құбылысын ескере отырып, серпімді қатты дененің тепе-теңдігі туралы есепті интегралдық-дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болатындығын көрсетті. Физика, химия, биология, экономика және т.б. әртүрлі есептерді зерттеуде интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді қолданыстары [3-13] еңбектерінде келтірілген.

Тақырыптың қазіргі жағдайы. XX ғасырдың 60 жылдарында жарияланған Вольтерра және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулеріне арналған есептер бойынша нәтижелерге Я.В. Быковтың [14] монографиясында қысқаша және мазмұнды шолу жасалған. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясында [15] мақала маңызды орын алады. Бұл мақалада А.И. Некрасов Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерін зерттеу мен шешудің тиімді әдісін ұсынған. Бұл әдістің негізгі идеясы - теңдеудің интегралдық бөлігін дифференциалдық теңдеудің оң жағы ретінде қарастырады және дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің іргелі жүйесін қолдана отырып, бастапқы теңдеуді екінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуіне келтіру болып табылады. Фредгольм интегралдық теңдеуін бірмәнді шешілімді деп ұйғарып, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі табылады. А.И.Некрасов әдісі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулеріне қойылған әртүрлі есептерді зерттеу мен шешуде кеңінен қолданылады [16]. Атап айтатын болсақ, аталған әдіс М.И. Иманалиев, К.А. Қасымов және олардың шәкірттерінің еңбектерінде [17-19] сингулярлы-ауытқыған интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі есептердің сапалық қасиеттерін зерттеудің негізі болып табылады. М.Қ. Дауылбаев интегралды мүшенің Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі шешімінің бастапқы секірістерінің асимптоталық қасиеттеріне және бар болуына әсерін зерттеген. Сонымен қатар, сингулярлы ауытқыған интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы секірістерімен шекаралық есептерін қарастырған [20-23].

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы және шеттік есептерін зерттеуге көптеген авторлардың еңбектері арналған [24-75]. Бұл жұмыстарда интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған есептерді зерттеудің сапалық әдістері, шешімдерді табудың жуықтау және сандық әдістері дамытылған. A.M. Wazwaz монографиясында есептерді заманауи әдістерді пайдаланып шешу жолдарына шолу жасалған. Бұл монографияда вариациялық-итерациялық, Адомянның декомпозициялық әдісі, қатарлар әдісі және тағы да басқа әдістер интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі есептерді шешумен көрсетілген. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясының әртүрлі аспектілері А.М. Самойленко, Б.П. Ткач, Д.Д. Баинов, А.А.Бойчук, P.S. Simeonov, J. Prüss, V. Lakshmikantham, M.R.M. Rao, T. Jangveladze, Z. Kiguradze, B. Neta еңбектерінде зерттелген.

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерінің есептерді қою және оларды шешу кезінде ескеруді қажет ететін бірнеше ерекшеліктері бар.

Атап айтатын болсақ, [68, 72 б.; 69, 343 б.] көрсетілгендей, сызықтық біртекті емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қосымша шарттарсыз шешілмеуі мүмкін. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық шеттік есептердің шешімділік және бірмәнді шешілімділік белгілері салыстырмалы түрде жақында алынғандығын ескереміз [70, 1155-1157 бб.]. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеуде негізгі әдістер - А.И. Некрасов және Грин функциясы әдістері қандайда бір аралық есептердің бірмәнді шешілімділік жағдайында қолданылады. Осылайша, бұл әдістер шешімнің бар болуының әртүрлі жеткілікті шарттарын орната отырып, осы теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділік белгілерін алуға мүмкіндік бермейді.

Д.С. Джумабаев Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді зерттеуге және шешуге параметрлеу әдісіне [76] негізделген жаңа тәсілді ұсынды. Шеттік есеп қарастырылған аралық бөліктерге бөлінеді, шешімнің ішкі аралықтардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері қосымша параметрлер ретінде енгізіледі және бастапқы шеттік есеп ішкі аралықтарда анықталған функциялар үшін эквивалентті параметрлі есепке келтіріледі. Қосымша параметрлерді енгізу жаңа белгісіз функциялар үшін ішкі аралықтардың бастапқы нүктелерінде бастапқы мәндерді береді.

Параметрлердің бекітілген мәндерінде бұл есеп интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі деп аталады. Осылайша, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылған аралықты бөліктеу, осы теңдеуге арнайы Коши есебін сәйкес қояды. Егер бұл есеп бірмәнді шешілімді болса, онда оның шешімін енгізілген параметрлер мен интегралдық-дифференциалдық теңдеудің бастапқы деректері арқылы өрнектеуге болады. Бұл өрнектерді шеттік шарттар мен бөліктеудің ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарттарына қойып, енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Шеттік есептің шешілімділігі осы жүйенің шешілімділігіне эквивалентті екендігі дәлелденеді. Көріп отырғанымыздай, бұл тәсілде де аралық есептің - арнайы Коши есебінің бір мәнді шешілімділігі талап етіледі. Бірақ жоғарыда көрсетілген әдістерден айырмашылығы, дифференциалдық бөлігінің үзіліссіз матрицасы және интегралдық бөлігі бар сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді болатындай бөліктеу әруақытта бар болады. Параметрлеу әдісінің аралық есебінің бұл қасиеті Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық шеттік есептерінің шешілімділік және бірмәнді шешілімділік белгілерін алуға мүмкіндік берді [70, 1157 б.; 71, 754-756 бб.; 73, 9-14 бб.]. Сәйкес арнайы Коши есебі бірмәнді шешілімді болатындай $[0,T]$ аралығының Δ_N бөліктеуі қарастырылып отырған Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін регулярлы деп аталады [74, 1206 б.]. Дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін әртүрлі есептерді зерттеуде және шешуде жалпы шешім маңызды мәнге ие. Әсіресе, жалпы шешімдердің көмегімен жәй дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділігі кез келген тұрақтыларға қатысты алгебралық теңдеулердің шешілімділігіне келтіріледі. Сызықтық біртекті емес жәй дифференциалдық теңдеу мен Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеуі әрдайым шешілімді және олардың шешімдер үйірі бар болады, ал біртекті емес сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің барлық уақытта бірдей шешімі болмауы мүмкін. Шешілімді емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерінің бар болуына байланысты классикалық жалпы шешім барлық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бола бермейді. Д.С. Джумабаевтың жұмысында сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жаңа жалпы шешімі енгізілді [75, 83 б.]. Бұл жалпы шешім аралықтың регулярлы бөліктеуімен тығыз байланысты және параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы

Коши есебінің шешімі көмегімен құрылады. Кез келген сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін жаңа жалпы шешім бар болады. Жаңа жалпы шешімді қолдану біртекті емес сызықтық Фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеуінің және осы теңдеу үшін шеттік есептердің шешілімділік белгілерін орнатуға мүмкіндік берді.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жуық шешімін іздеп табу кезінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің интегралдық мүшесін квадратуралық формуламен ауыстырғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер пайда болады. Жүктелген теңдеулер теориясының дамуына жүктелген дифференциалдық, жүктелген интегралдық-дифференциалдық, жүктелген функционалдық теңдеулердің анықтамалары берілген А.М. Нахушевтің [77, 78] еңбектері айтарлықтай үлес қосты. А.М. Нахушев пен оның шәкірттерінің еңбектері жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді қарқынды және жүйелі түрде зерттеуге ықпал етті. Соболев кеңістігіндегі жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін біртекті емес есептердің шешімділік мәселелерін М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов [79] және олардың шәкірттері зерттеді. В.М. Абдуллаевтың, К.Р. Айда-заденің [80] жұмысында бастапқы және ажыратылмаған көп нүктелі шарттары бар жәй жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдісі ұсынылған. [81] жұмыста жүктелген дифференциалдық теңдеулерге арналған параметрлері бар сызықтық емес шеттік есептерді шешу әдісі ұсынылды. Бұл әдіс Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісіне және параметрлі сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге негізделген. Сызықтық жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер мен олардың үйірі үшін де жаңа жалпы шешім енгізілді [82].

[83] жұмыста сызықтық емес жәй дифференциалдық теңдеу үшін жаңа жалпы шешімдер енгізілді және зерттеу мен шешуде пайдаланылды. Дифференциалдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептерге [84-88] жұмыстарда параметрлеу әдісі таратылды. Параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебінің шешілімділігі мен шешімді табу тәсілдері қарастырылды. Дифференциалдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жаңа жалпы шешімі құрылып, қасиеттері айқындалды. Дифференциалдық бөлігі сызықтық емес болатын интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімін табу алгоритмі жасалды және сандық түрде жүзеге асырылды. Интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің шешімінің бар болуы

шарттары дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін орталанған шеттік есептің шешілімді болуы жағдайында орнатылды.

Дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің сызықтық емес болуы осы теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептердің сапалық қасиеттерін зерттеуде де, олардың шешімдерін табуда да түбегейлі қиындықтарға әкеледі [81, 1795 б.; 83, 890 б.; 84, 30-32 бб.; 85, 45б.].

Сызықтық емес есептерді шешуде көп жағдайда итерациялық әдістер пайдаланылады. Ньютон, Ньютон-Канторович әдістері сияқты тиімді итерациялық әдістер "жақсы" бастапқы жуықтауды таңдауды талап етеді. Итерациялық процестердің жинақтылық мәлелелері, бастапқы жуық мәнді таңдау мәселелері және т.б. монографияларда жан-жақты талқыланады [89-93].

Д.С.Джумабаевтың еңбектерінде шенелмеген операторлары бар сызықтық емес теңдеулер үшін итерациялық процестер құрылды және олардың жинақтылық шарттары орнатылды. Осы нәтижелер жәй дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептерге қолданылды [94-97].

Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепке Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісін қолданған кезде параметрлі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі аралық есеп болып табылады [84, 26-28 бб.; 97, 45-47 бб.]. Бұл жағдайда итерациялық әдістер арнайы Коши есебін шешуде де, параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін шешуде де қолданылады [98], [99]. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін квазисызықтық шеттік есепті интегралдық мүшесі Симпсон формуласымен жуықтау арқылы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін квазисызықтық шеттік есепке келтіруге шешу жолы [100] ұсынылған.

Кіші сандық параметрі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін есептерді шешудің тиімді әдістерінің бірі - орталау әдісі [101-103] деуге болады. Орталау әдісінің көмегімен интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептің шешілімділігі дифференциалдық орталанған жүйе үшін ұқсас есептің шешімділігіне келтіріледі. Бұл сәйкес дифференциалдық орталанған жүйе үшін шеттік есеп үшін орнатылған нәтижелерді бастапқы есептің шешілімділігін зерттеуге пайдалануға мүмкіндік береді.

Жұмыстың мақсаты: Интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бастапқы және шеттік есептерді шешуде Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісін қолдану және тиімді тәсілдерін құру.

Зерттеу міндеттері:

a) интегралдық бөлігі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешімінің бар болуы және жалғыздығы шарттарын орнату;

b) интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің жаңа Δ_N жалпы шешімін құру және оның қасиеттерін анықтау;

c) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептің шешімділік шарттарын алу;

d) Квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Δ_N жалпы шешімді құру және шеттік есептің шешімін табу;

e) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Коши есебі мен шеттік есебінің шешілімділік шарттарын орталау әдісімен орнату.

Зерттеу нысаны интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін бастапқы және шеттік есептері болып табылады.

Зерттеу пәні интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептердің шешімділік мәселелері, кіші сандық параметрі бар бастапқы және шеттік есептер үшін орталау әдісін негіздеу.

Ғылыми жаңалық.

1. Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуіне қолданылды.
2. Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін арнайы Коши есебінің шешілімділік шарттары орнатылды.
3. Интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін жаңа Δ_N жалпы шешім құрылды.
4. Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есепке қолданылды.
5. Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бастапқы және шеттік есептері орталау әдісімен шешілді.

Қорғауға шығарылатын негізгі ережелер:

- параметрлері бар интегралдық бөлігі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары;

- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін арнайы Коши есебін шешудің итерациялық әдістері және олардың сандық жүзеге асырылуы;

- интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі және оның қасиеттері;

- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есебін шешудің параметрлеу әдісі;

- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есебінің оқшауланған шешімінің бар болуы жеткілікті шарттары;

- интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің параметрлеріне қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін құру;

- сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін бастапқы және шеттік есептері шешімдерінің болуын зерттеуге арналған орталау әдісі негіздемесі.

Сенімділік және негізділік. Диссертацияда дифференциалдық, интегралдық-дифференциалдық және операторлық теңдеулер теориясының әдістері мен нәтижелері кеңінен қолданылады. Диссертацияда қарастырылған есептерді зерттеудің және шешудің негізгі әдісі параметрлеу әдісі және орталау әдісі болып табылады.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертацияның нәтижелері негізінен теориялық сипатта болып табылады. Жұмыстың ғылыми маңыздылығы интегралдық бөлігі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін зерттеу мен есептерді шешудің конструктивті әдісін құру болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс "Дифференциалдық теңдеулер мен Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық емес шеттік есептерді зерттеу және шешу әдістері" (№ AP05132486, 2018-2020жж.), "Жалпыланған түрдегі бөлікті-тұрақты аргументі бар гиперболалық теңдеулер үшін шеттік есептер және олардың қолданыстары" (№AP08855726, 2020-2022жж.), "Екінші ретті интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешу әдістері" (№AP15473218, 2022-2024жж.) жобалары аясында «Жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер» басымдығы бойынша гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі диссертацияда келтірілген барлық нәтижелерді автор алды. Бірлескен авторлар мен ғылыми кеңесшілердің қатысуы есептерді қоюдан және алынған нәтижелерді талқылаудан тұрады.

Жұмысты апробациялау. Жұмыстың негізгі нәтижелері келесі іс-шараларда баяндалды және талқыланды:

– Сәуір айындағы дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Математика және математикалық моделдеу институты. Алматы, (3-5 сәуір 2019 ж., 3-5 сәуір 2020 ж.; 4-6 сәуір 2022 ж.);

– Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті Дифференциалдық теңдеулер кафедрасының ғылыми семинары. Алматы, (ақпан 2019ж., сәуір 2020ж.);

– Жас математиктердің халықаралық конференциясы. Украина Ұлттық Ғылым Академиясының Математика институты, Киев (6-8 маусым 2019 ж.);

– Т.Шевченко атындағы Киев Ұлттық университетінің стохастикалық дифференциялық теңдеулер семинары, Киев, Украина (маусым 2019 ж.).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 10 жұмыс жарияланды [104-113], оның ішінде Scopus базасында индекстелетін рейтингтік ғылыми журналда 3 жарияланым, ҚР ҒЖБ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми нәтижелерді жариялау тізіміне енетін ғылыми басылымдарда 3 мақала, халықаралық конференциялар мен семинарлар материалдарында 4 мақала, оның ішінде шетелдік конференциялар материалдарында 1 мақала жарияланды.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттердің 132 шығу көзін қамтитын тізімнен тұрады. Формулалардың, теоремалардың, леммалар мен анықтамалардың нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан бөлім нөмірін, екіншісі ішкі бөлім нөмірін, үшіншісі формуланың меншікті нөмірін, теореманы, лемманы, ішкі бөлім ішіндегі анықтамаларды білдіреді. Диссертациялық жұмыс 107 беттен тұрады.

Диссертацияның қысқаша мазмұны. Кіріспе қарастырылып отырған есептердің қазіргі жәй-күйін бағалауды, ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттілігінің негіздемесін қамтиды. Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы, зерттеудің негізгі мақсаттары мен міндеттері, қорғауға ұсынылған ережелер көрсетілген.

Бірінші бөлімде интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырылады.

1.1 ішкі бөлімінде келесі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, x(\tau)\big) d\tau\,, t \in\ [0,T], x \in R^n, \quad (0.1)$$

үшін Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісінің жалпы схемасы ұсынылады.
Мұнда $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$ $-$ $[0,T]$ аралығында үзіліссіз $n \times n$ өлшемді матрицалар; f_k: $[0,T] \times R^n \to R^n$, $k = \overline{1,m}$ үзіліссіз вектор-функция, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |x_i|$.

$[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (0.1) теңдеуін қанағаттандыратын $x(t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$ вектор-функциясы (0.1) теңдеуінің шешімі болып табылады (сондай-ақ $t = 0$ және $t = T$ нүктелерінде (0.1) теңдеуін $\dot{x}_{\text{оң}}(0)$, $\dot{x}_{\text{сол}}(0)$ біржақты туындылары қанағаттандырады).

$[0,T]$ аралығын $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ нүктелері арқылы N бөлікке бөліп, осы бөліктеуді Δ_N деп белгілейміз.

Соның нәтижесінде

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, x_j(\tau)\right) d\tau\,, t \in [t_{r-1}, t_r), (0.2)$$

сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз, мұнда

$$\big(t, x_r(t)\big) \in G_r^0(\rho),\ r = \overline{1,N}.$$

Егер $x(t)$ функциясы (0.1) теңдеуінің шешімі болса, $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$ ішкі аралықтарында $x(t)$ функциясының тарылымдарынан құралған $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\big)$ функциялар жүйесі үшін келесі теңдіктер орынды болады:

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}\big(t_p\big), \qquad p = \overline{1, N-1}. \qquad (0.3)$$

(0.3) теңдіктері Δ_N бөліктеуінің ішкі нүктелеріндегі (0.1) теңдеуі шешімінің үзіліссіздік шарттары болып табылады.

$\lambda_r \mathrel{\widehat{=}} x_r(t_{r-1})$ қосымша параметрлерін енгіземіз және $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $\ t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$ алмастырулары арқылы аралықтың ішкі интервалдарында

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)f_k\big(\tau,u_j(\tau)+\lambda_j\big)d\tau\,,t\in[t_{r-1},t_r),r=\overline{1,N}\quad(0.4)$$

параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін және

$$u_r(t_{r-1})=0,\qquad r=\overline{1,N}\,,\qquad(0.5)$$

бастапқы шарттарын аламыз.

(0.4), (0.5) есебі параметрлі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі деп аталады.

$\lambda=\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_N^*)\in\mathbb{R}^{nN}$ параметрінің бекітілген мәнінде $u_r(t,\lambda^*)$, $r=\overline{1,N}$ компоненттері t бойынша анықталу интервалдарында үзіліссіз дифференциалданатын және $\lambda=\lambda^*$ болғанда (0.4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (0.5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын

$$u[t,\lambda^*]=\big(u_1(t,\lambda^*),u_2(t,\lambda^*),\ldots,u_N(t,\lambda^*)\big)\in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$$

функциялар жүйесі (0.4), (0.5) арнайы Коши есебінің шешімі болып табылады.

Берілген $\lambda^{(0)}=\left(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)}\right)\epsilon\ \mathbb{R}^{nN}$ векторы және $\rho_\lambda>0$, $\rho>\rho_\lambda$ сандары бойынша

$$S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)=\left\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\epsilon\ \mathbb{R}^{nN}\colon\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|\le\rho_\lambda,\ \ r=\overline{1,N}\right\},$$

$$S(x_0(t),\rho)=\{x\in\ \mathbb{R}^{nN}\colon\ \|x-x_0(t)\|\le\rho\},$$

$$G^0(\rho)=\{(t,x)\colon\ t\in[0,T],\qquad\|x-x_0(t)\|\le\rho\},$$

жиындарын құрамыз, мұндағы бөлікті-тұрақты $x_0(t)$ вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында

$$x_0(t)=\lambda_r^{(0)},\ t\in\ [t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N}\ \text{және}\ x_0(T)=\lambda_N^{(0)}$$

теңдіктері арқылы анықталады.

0.1 - шарт. *Келесі теңсіздіктер орындалсын делік:*

1) $\|f_k(t,x)\| \leq M_k,\ (t,x) \in G^0(\rho),\ k = \overline{1,m},\ M_k -\ const;$

2) $D\bar{h} = \left[\alpha\left(\rho + \left\|\lambda^{(0)}\right\|\right) + K_0\right]\bar{h} < \rho,$

мұндағы $\alpha = \max\limits_{t\epsilon[0,T]}\|A(t)\|,\ \bar{h} = \max\limits_{r=\overline{1,N}}(t_r - t_{r-1})$

$$K_0 = M_k \sum_{k=1}^{m} \max_{t\epsilon[0,T]}\|\varphi_k(t)\| \int_0^T \|\psi_k(\tau)\| d\tau.$$

Келесі жиындарды

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in\ [t_{p-1}, t_p), \|x - x_0(t)\| \leq \rho - D(t_p - t)\right\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in\ [t_{N-1}, t_N),\ \ \|x - x_0(t)\| \leq \rho - D(t_N - t)\},$$

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho)\,, \qquad \rho_\lambda = \rho - D\bar{h}$$

енгіземіз.

1.2 ішкі бөлімінде параметрлі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі зерттеледі.

Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебін кесіндіде қарастырамыз:

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)[v_r + \lambda_r] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j\right) d\tau\,, t\epsilon[t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}, \quad (0.6)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}. \quad (0.7)$$

Егер $u[t,\lambda^*]$ және $v[t,\lambda^*]$ функциялар жүйелері сәйкесінше (0.4), (0.5) және (0.6), (0.7) есептерінің шешімдері болса, онда келесі теңдіктер орындалады:

$$u_r(t,\lambda^*) = v_r(t,\lambda^*), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}, \tag{0.8}$$

$$\lim_{t\to t_r-0} u_r(t,\lambda^*) = v_r(t_r,\lambda^*), r = \overline{1,N}. \tag{0.9}$$

$\hat{\lambda} \in S(\lambda^0, \rho_\lambda)$ бекітілген параметрі үшін келесі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)\big[v_r + \hat{\lambda}_r\big] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j\big) d\tau\,, t\epsilon[t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}, \tag{0.10}$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}. \tag{0.11}$$

арнайы Коши есебін аламыз. $\rho_v \in (0, \rho - \rho_\lambda)$ үшін

$$S(0,\rho_v) = \big\{v(t) = \big(v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_N(\tau)\big) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN}) : \|v[\cdot]\|_3 \leq \rho_v\big\}$$

жиынын құрамыз.

Келесі тұжырым орынды.

0.1 – теорема. *0.1 - шарты және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(i) $\|f_k(t,x') - f_k(t,x'')\| \leq L_k \|x' - x''\| (t,x'), (t,x'') \in G^0(\rho), L_k$- *тұрақтылар*, $k = \overline{1,m}$;

(ii) $(\alpha + K_0 T)\bar{h} < 1$;

(iii) $\bar{h}(\alpha(\rho + \|\lambda^0\|) + K_0 T) \leq \rho_v$.

Онда кез келген $\hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін* $S(0, \rho_v)$ *шарында (0.10), (0.11) арнайы Коши есебінің шешімі болатын жалғыз* $v[t, \hat{\lambda}] = \left(v_1(t, \hat{\lambda}), v_2(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda})\right)$ *функциялар жүйесі бар болады.*

1.3 ішкі бөлімінде параметрлі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебін шешуге демпфирлеуші көбейткіштері бар итерациялық әдіс ұсынылады.

$\lambda = \hat{\lambda}$ болғанда (0.10) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі мен (0.11) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын

$$v[t, \hat{\lambda}] = \left(v_1(t, \hat{\lambda}), v_2(t, \hat{\lambda}), \dots, v_N(t, \hat{\lambda})\right) \in \tilde{C}([0, T], \Delta N, R^{nN})$$

функциялар жүйесі (0.9), (0.10) арнайы Коши есебінің шешімі болып табылады.

$\hat{v}^{(0)}[t] = \left(\hat{v}_1^{(0)}(t), \hat{v}_2^{(0)}(t), \dots, \hat{v}_N^{(0)}(t)\right) \in \tilde{C}([0, T], \Delta N, R^{nN})$ функциялар жүйесін, $\rho_v > 0$ санын және

$$S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \rho_v\right) = \left\{v[t] \in \tilde{C}([0, T], \Delta N, R^{nN}) : \left\|v[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\| < \rho_v\right\}$$

шарын таңдап аламыз. (0.10), (0.11) есебін шешу үшін оны эквивалентті операторлық теңдеу түрінде жазып және [114] жұмыстардың нәтижелерін пайдаланамыз.

$$\hat{x}_0(t) = \hat{\lambda}_r + \hat{v}_r^{(0)}(t), \ t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N},$$

теңдігі арқылы $\hat{x}_0(t)$ бөлікті-үзіліссіз функциясын анықтаймыз және

$$G^0(\rho) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - \hat{x}_0(t)\| < \rho\}, \qquad \rho > \rho_v$$

жиынын енгіземіз.

0.2 – шарт. $f(t, x)$ *функциясының* $G^0(\rho)$ *жиынында бірқалыпты үзіліссіз* $f'_x(t, x)$ *дербес туындысы бар.*

Келесі кеңістіктерді енгіземіз:

$$X = v[t] = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\right) \in \tilde{C}([0, T], \Delta_N, R^{nN}) : v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N},$$

$$Y = \tilde{C}([0,T], \Delta_N, R^{nN}).$$

(0.10), (0.11) арнайы Коши есебін сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде қарастырамыз

$$Hv[t] + F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = 0, \tag{0.12}$$

мұндағы $H: X \to Y$ сызықтық операторы

$$Hv[t] = \omega^{(1)}[t],$$

$$\omega^{(1)}[t] = \Big(\omega_1^{(1)}(t), \omega_2^{(1)}(t), \dots, \omega_N^{(1)}(t)\Big),$$

$$\omega_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - A(t)v_r(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1, N}.$$

түрінде анықталады.
H операторының анықталу облысы

$$D(H) = \big\{v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \dots, v_r(t)\big) \in X\big\},$$

мұндағы $v_r(t)$ функциясы $[t_{r-1}, t_r]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады, $r = \overline{1, N}$.

Ал $F\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ сызықтық емес операторы келесі түрле болады:

$$F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = \omega^{(2)}\big[t, \hat{\lambda}\big],$$

$$\omega^{(2)}\big[t, \hat{\lambda}\big] = \Big(\omega_1^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), \omega_2^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big), \dots, \omega_N^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big)\Big),$$

$$\omega_r^{(2)}\big(t, \hat{\lambda}\big) = -A(t)\hat{\lambda}_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j\big) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N}.$$

0.2 - шарты $F_v'\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ Фреше туындысының $S\big(\hat{v}^{(0)}[t], \rho_v\big)$ шарында бар болуы мен бірқалыпты үзіліссіздігін қамтамасыз етеді [115].

Фреше туындысы келесі түрде болады:

$$F'_v\left(\tilde{v}[t], \hat{\lambda}\right)h = \omega^{(3)}\left[t, \hat{\lambda}\right],$$

$$\omega^{(3)}\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(\omega_1^{(3)}\left(t, \hat{\lambda}\right), \omega_2^{(3)}\left(t, \hat{\lambda}\right), \dots, \omega_N^{(3)}\left(t, \hat{\lambda}\right)\right),$$

$$\omega_r^{(3)}\left(t, \hat{\lambda}\right) = -\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f'_{k,x}\left(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) h_j(\tau) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N},$$

мұндағы

$$h[t] = \left(h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)\right) \in X$$

функциялар жүйесінің $h_r: [t_{r-1}, t_r] \to R^n, r = \overline{1, N}$ компоненттері үзіліссіз.

$H + F'_v\left(\tilde{v}[t], \hat{\lambda}\right): X \to Y$ тұйық сызықтық операторының шенелген кері операторы бар болады, сонда тек сонда ғана, егер

$$\left(H + F'_v\left(\tilde{v}[t], \hat{\lambda}\right)\right) h = g[t], \qquad g[t] = \left(g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)\right) \in Y, \quad (0.13)$$

операторлық теңдеуі бір мәнді шешілімді болса.
(0.13) теңдеуі келесі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебіне

$$\frac{dh_r(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f'_{k,x}\left(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) h_j(\tau) d\tau +$$

$$+g_r(t) + A(t)h_r(t), t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N}, \quad (0.14)$$

$$h_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N}, \quad (0.15)$$

эквивалентті.

$L(Y, X)$ сызықтық шенелген $\Lambda: Y \to X$ операторларының қандай да бір индукцияланған нормалы кеңістігі болсын.

0.1 – анықтама. *(0.14), (0.15) арнайы Коши есебі қисынды шешілімді деп аталады, егер кез келген* $g[t] \in Y$ *үшін осы есептің жалғыз* $h[t] \in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ *шешімі бар болса және осы шешім үшін* $\|h[\cdot]\|_4 \leq \gamma\|g[\cdot]\|_4$ *теңсіздігі орындалатын болса, мұндағы* γ *тұрақтысы* $g[t]$ *функциясынан тәуелсіз.*

γ саны $(0.14),(0.15)$ есебінің қисынды шешімділігінің тұрақтысы деп аталады.

Келесі тұжырым орынды.

0.3 – теорема. *Келесі шарттар орындалсын делік:*

1) $F_v'\big(\tilde{v}[t],\hat{\lambda}\big)$ *Фреше туындысы* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\big)$ *шарында бірқалыпты үзіліссіз;*

2) Барлық $\tilde{v}[t] \in S\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\big)$ *үшін*

$$H + F_v'\big(\tilde{v}[t],\hat{\lambda}\big): X \to Y$$

сызықтық операторының шенелген кері операторы бар және

$$\left\|\left[H + F_v'\big(\tilde{v}[t],\hat{\lambda}\big)\right]^{-1}\right\|_{L(Y,X)} \leq \hat{\gamma},$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы $\hat{\gamma}$ *-тұрақты*;

3) $\hat{\gamma}\cdot\left\|H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F_v'\big(\hat{v}^{(0)}[\cdot],\hat{\lambda}\big)\right\|_1 < \hat{\rho}_v.$

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = -\frac{1}{\alpha_k}\left[H + F_v'\big(\hat{v}^{(k)}[t],\hat{\lambda}\big)\right]^{-1}\left[H\hat{v}^{(k)}[t] + F\big(\hat{v}^{(k)}[t],\hat{\lambda}\big)\right] +$$

$$+\hat{v}^{(k)}[t], \;\; k = 0,1,2,..., \qquad (0.16)$$

итерациялық процесімен анықталған $\{\hat{v}^{(k)}[t]\}$, $k = 0,1,2,...$ *элементтер тізбегі* $v\big[t,\hat{\lambda}\big]$ *функциялар жүйесіне, яғни (0.12) операторлық теңдеуінің* $S\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\big)$ *шарындағы оқшауланған шешіміне жинақталатындай* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0,1,2,...$ *сандары бар болады және келесі бағалау орындалады:*

$$\left\|v\big[\cdot,\hat{\lambda}\big] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_1 \leq \gamma\left\|H\hat{v}^{(0)}[t] + F_v'\big(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\lambda}\big)\right\|_1. \qquad (0.17).$$

(0.12) операторлық теңдеуі мен (0.6), (0.7) арнайы Коши есебінің өзара байланысынан және 0.3 теоремадан келесі тұжырымды аламыз.

0.4 – теорема. *0.2 - шарты орындалсын, (0.14), (0.15) арнайы Коши есебі барлық* $v[t] \in S\left(v^{(0)}[t], \hat{\rho}_v\right)$ *үшін* $\hat{\gamma}$ *тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын және келесі теңсіздік орынды болсын:*

$$\hat{\gamma} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| \dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - A(t)\left(\hat{v}_r^{(0)}(t) + \lambda_r\right) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, \hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \lambda_j\right) d\tau \right\| < \hat{\rho}_v.$$

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] + \Delta v^{(k)}\left[t, \hat{\lambda}\right], k = 0,1,2, \qquad (0.18)$$

итерациялық процесімен анықталатын $\left\{\hat{v}_r^{(k)}[t]\right\},\ k = 0,1,2,\dots$ *элементтер тізбегі, мұндағы*

$$\Delta v^{(k)}\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(\Delta v_1^{(k)}\left(t, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right), \Delta v_2^{(k)}\left(t, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right), \dots, \Delta v_N^{(k)}\left(t, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N\right)\right)$$

функциялар жүйесі

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = A(t)\Delta v_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f'_{k,x}\left(\tau, v_j^{(k)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) \Delta v_j(\tau) d\tau -$$

$$\frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{dv_r^{(k)}(t)}{dt} - A(t)\left[v_j^{(k)}(t) + \hat{\lambda}_r\right] - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, v_j^{(k)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) d\tau\right), \qquad (0.19)$$

$$\Delta v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}, k = 0,1,2,\dots, \tag{0.20}$$

сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебінің шешімі, $S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_v\right)$ *шарына тиісті болатындай және (0.10), (0.11) есебінің оқшауланған шешімі -* $v\left[t, \hat{\lambda}\right]$ *функциялар жүйесіне жинақталатындай* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0,1,2,\dots$ *сандары бар болады және келесі бағалау орындалады:*

$$\left\| v\left[\cdot, \hat{\lambda}\right] - \hat{v}^{(0)}[\cdot] \right\|_3 \leq$$

$$\leq \hat{\gamma} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \left\| \dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - A(t)\left(\hat{v}_r^{(0)}(t) + \lambda_r\right) - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(\tau) f\left(\tau, \hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \lambda_j\right) d\tau \right\|, \tag{0.21}$$

Итерациялық процесті сипаттайтын мысал келтірілген.

Екінші бөлімде (0.5), (0.6) арнайы Коши есептерін шешу арқылы (0.1) интегралдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі енгізіледі және оны шеттік есепке қолдану мәселелері қарастырылады.

2.1 ішкі бөлімінде (0.1) интегралдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі құрылады және оның қасиеттері орнатылады.

Алдымен, (0.1) интегралдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін жалпы шешімнің жаңа ұғымы енгізіледі.

1.1 ішкі бөлімінде параметрлеу әдісі көмегімен (0.1) теңдеуі (0.3), (0.4) параметрлі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебіне келтірілді.

(0.3), (0.4) және (0.5), (0.6) арнайы Коши есептерінің арасындағы байланысты ескере отырып, біз келесі анықтаманы береміз.

0.2 - анықтама. *0.1 - теореманың шарттары орындалсын және*

$$v[t, \lambda] = \left(v_1(t, \lambda), \quad v_2(t, \lambda), \dots, v_N(t, \lambda)\right) \in S(0, \rho_v)$$

функциялар жүйесі (0.5), (0.6) $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *параметрлі арнайы Коши есебінің шешімі болсын делік. Онда*

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + v_r(t, \lambda),\ t \in [t_{r-1}, t_r],\ \ r = \overline{1, N}$$

және

$$x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + v_N(T, \lambda)$$

теңдіктерімен анықталатын $x(\Delta_N, t, \lambda)$ *функциясы (0.1) теңдеуінің* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

0.1 - теореманың шарттары (0.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынында Δ_N жалғыз жалпы шешімі бар болатындығын қамтамасыз етеді.

Кез келген $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ параметрі үшін $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы барлық $t \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ мәндері үшін (0.1) теңдеуін қанағаттандырады және $\big(t, x(\Delta_N, t, \lambda)\big)$ жұбы $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынына тиісті болады.

0.1 теоремасының шарттары орындалсын және $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы (0.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі болсын. Келесі тұжырым орынды.

0.5 – теорема. $t = t_p,\ p = \overline{1, N-1}$ *мүмкін үзіліс нүктелері болатын бөлікті-үзіліссіз* $\tilde{x}(t)$ *функциясы* $[0, T]$ *аралығында берілсін және* $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ *болсын.* $\tilde{x}(t)$ *функциясының үзіліссіз туындысы бар болсын және (0.1) теңдеуін барлық* $t \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ *үшін қанағаттандырсын деп жорамалдайық.*

Онда $x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big) = \tilde{x}(t)$ *теңдігі барлық* $t \in [0, T]$ *үшін орындалатындай жалғыз* $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$, *бар болады.*

0.1 – салдар. $x^*(t)$ *функциясы (0.1) теңдеуінің шешімі және* $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ *болсын. Онда* $x(\Delta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ *теңдігі барлық* $t \in [0, T]$ *үшін орындалатындай жалғыз* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ *бар болады.*

2.2 ішкі бөлімінде Δ_N жалпы шешімі (0.1) теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есепті шешуге қолданылады.

(0.1) теңдеуі мен

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{0.22}$$

сызықтық емес шекаралық шартын қарастырамыз, мұндағы $g: R^n \times R^n \to R^n$ үзіліссіз.

(0.1) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі (0.1), (0.22) шеттік есебінің шешілімділігін параметрлерге қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімділігіне келтіруге мүмкіндік береді.

Ол үшін (0.3) үзіліссіздік шарттарын мына түрде жазамыз:

$$\lim_{t \to t_p - 0} x(\Delta_N, t, \lambda) - x(\Delta_N, t_p, \lambda) = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

мұндағы $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы (0.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі. Δ_N – жалпы шешімін (0.22) шекаралық шартқа және (0.3) үзіліссіздік шарттарын қоя отырып, сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$g[\lambda_1, \lambda_N + v_N(T, \lambda)] = 0, \tag{0.23}$$

$$\lambda_p + v_p(t_p, \lambda) - \lambda_{p+1} = 0, p = \overline{1, N-1}. \tag{0.24}$$

(0.23), (0.24) теңдеулер жүйесін мына түрде жазамыз

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \lambda \in R^{nN}. \tag{0.25}$$

Таңдалған Δ_N бөліктеуі үшін 0.1 - теоремасының шарттары орындалады және $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы (0.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі болсын делік.

0.6 – теорема. *$x^*(t)$ функциясы (0.1), (0.22) есебінің шешімі және $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ болсын. Онда компоненттері $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$ анықталатын $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ векторы (0.25) теңдеуінің шешімі болады және $\lambda^* \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$. Және керісінше, егер $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ (0.25) теңдеуінің шешімі болса, онда $\tilde{x}(t) = x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big)$ функциясы (0.1), (0.22) есебінің шешімі болады және $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.*

2.3 ішкі бөлімінде интегралдық бөлігі квасызықтық болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін арнайы Коши есебінің шешімін табу мәселесі зерттеледі.

Келесі квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t)$$
$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, x(\tau)\big)d\tau, t \in [0,T], x \in R^n, (0.26)$$

мұндағы $\varepsilon > 0, A(t), \varphi_k(t), \psi_k(\tau) - n \times n$ – матрицалары және , $f_0(t)$ - n векторы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз, $f_k: [0,T] \times R^n \to R^n, k = \overline{1,m}$ үзіліссіз, $\|x\| = \max_{i=1,n} |x_i|$.

Сызықтық теңдеудің ұқсас шешімін негізге ала отырып, (0.26) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімін құру және табылған шешімді теңдеу шеттік есепке қолдану.

Алдымен, (0.26) теңдеуге $\varepsilon = 0$ қойып,

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau +$$

$$+A(t)y + f_0(t), t \in [0,T], y \in R^n \quad (0.27)$$

сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеуін қарастырамыз.

(0.27) теңдеуіне Д.С.Джумабаев параметрлеу әдісін [69,p.345] қолдану арқылы Δ_N бөліктеуі үшін келесі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі арнайы Коши есебін аламыз

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)[v_r + \lambda_r] + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau)\big[v_j(\tau) + \lambda_j\big]d\tau +$$

$$+f_0(t), t \epsilon [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}, \quad (0.28)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}. \quad (0.29)$$

(0.28), (029) сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі арнайы Коши есебі Д.С. Джумабаевтың еңбектерінде жан-жақты зерттелген және оның қисынды шешілімділігінің шарттары орнатылған.

(0.26) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімін құру үшін Д.С.Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз.

$\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}\right) \in R^{nN}$ векторы мен $\rho_\lambda > 0,\ \rho > \rho_\lambda,\ \ \rho_u = \rho - \rho_\lambda$ сандары берілсін, $[0, T]$ кесіндісінде бөлікті-үзіліссіз $y^{(0)}(t) = y\left(\Delta_N, t, \lambda^{(0)}\right)$ функциясын, элементтері $v_r^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) - \lambda_r^{(0)},\ t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ болатын $v^{(0)}[t] = \left(v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t), \ldots, v_N^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесін таңдаймыз және келесі жиындарды құрамыз:

$$G^0(\rho) = \left\{(t, x): t \in [0, T], \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\},$$

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda,\ \ r = \overline{1, N}\right\},$$

$$S\left(v^{(0)}[t], \rho_v\right) = \left\{u[t] \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}): \left\|u[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_v\right\},$$

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t, x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \left\{(t, x): t \in [t_{N-1}, t_N), \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\},$$

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Егер де $x(t)$ функциясы (0.26) теңдеуін қанағаттандырса және $\left(t, x(t)\right) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ болса, онда $x(t)$ функциясының $[t_{r-1}, t_r)$ аралықтарындағы тарылымдары болатын $x_r(t),\ r = \overline{1, N}$, функциялары келесі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) x_j(\tau) d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, x_j(\tau)\right) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad (0.30)$$

қанағаттандырады және $\left(t, x_r(t)\right) \in G_r^0(\rho)$ болады, мұнда $r = \overline{1, N}$.

$\lambda_r \mathrel{\hat=} x_r(t_{r-1})$ параметрлерін енгізе отырып, (0.30) жүйесінде әрбір $r-$ ші аралықта $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r,\ t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, N}$ алмастыруларын жасай отырып, келесі параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big(u_j(\tau) + \lambda_j\big)d\tau + f_0(t)$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j\big)d\tau\,, t \in [t_{r-1}, t_r) \quad (0.31)$$

және

$$u_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N} \quad (0.32)$$

бастапқы шарттарын аламыз.
(0.31), (0.32) есебін квазисызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебі деп атаймыз.
(0.31), (0.32) есебін операторлық теңдеу түрінде жазамыз және оны шешуде итерациялық процесті қолданамыз. Сызықтық $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ операторын енгізейік:

$$Hu[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

мұндағы

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{u}_r(t) - A(t)u_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) u_j(\tau) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}.$$

Ендігі кезекте (0.31), (0.32)) арнайы Коши есебін

$$Hu[t] = \varepsilon F(u[t], \lambda) + F_0[t, \lambda], \quad (0.33)$$

сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде жазамыз, мұндағы

$$F(u[t],\lambda) = \left(w_1^{(2)}(t), w_2^{(2)}(t), \ldots, w_N^{(2)}(t)\right),$$

$$w_r^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau\,,\ t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}.$$

0.7 - теорема. *(0.31), (0.32) арнайы Коши есебі χ тұрақтысымен қисынды-шешілімді болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

$(i) \|f_k(t,x') - f_k(t,x'')\| \leq L_k \|x' - x''\|,$ мұнда L_k *− тұрақтылар,*

$k = \overline{1,m}, \quad (t,x'),(t,x'') \in G^0(\rho);$

$$(ii) \quad q_\varepsilon = \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k L_k < 1,\ \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k\|\, d\tau \leq M_k, k = \overline{1,m};$$

(iii) *барлық* $\lambda \in \left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін*

$$\frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|f_k(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\| < \rho_u.$$

Онда әрбір $\lambda \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ *үшін (0.28), (0.29) арнайы Коши есебінің* $S\big(v^{(0)}, \rho_u\big)$ *шарына тиісті болатын жалғыз шешімі -* $u[t,\lambda,\varepsilon] = \big(u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \ldots, u_N(t,\lambda,\varepsilon)\big)$ *функциялар жүйесі бар болады және келесі теңсіздік орындалады*

$$\|u[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v\|_2 \leq \frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|f_k(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|\,. \quad (0.34)$$

Келесі анықтаманы енгізейік.

0.3 - анықтама.

$$u[t,\lambda,\varepsilon] = \big(u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \ldots, u_N(t,\lambda,\varepsilon)\big) \in S(v[t,\lambda], \rho_u)$$

функциялар жүйесі $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *параметрлері бар (0.31), (0.32) арнайы Коши есебінің жалғыз шешімі болсын. Онда*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = \lambda_r + u_r(t, \lambda, \varepsilon), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$$

және

$$x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon)$$

теңдіктерімен анықталған $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *функциясы (0.26) теңдеуінің* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

0.3 - анықтама мен 0.7- теоремадан келесі тұжырым туындайды.

0.8 - теорема. *0.7 - теорема шарттары орындалса, онда (0.26) теңдеуінің* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *жиынында жалғыз* Δ_N *жалпы шешімі болатын* $x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon)$ *функциясы бар болады және оны келесі түрде жазуға болады*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = y(\Delta_N, t, \lambda) + \Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon),$$

мұндағы $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ *функциясы*

$$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) = u_r(t, \lambda, \varepsilon) - v_r(t, \lambda),$$

$$\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) = \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda, \varepsilon) - \lim_{t \to T-0} v_N(t, \lambda)\, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$$

теңдіктерімен анықталады.

Сонымен қатар, келесі бағалау орынды болады

$$\sup_{t \in [0,T]} \|x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)\| \le \frac{1}{1 - q_\varepsilon} \varepsilon \chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r = \overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|f_k(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

2.4 ішкі бөлімінде квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есептің шешілімділігі мәселесі зерттеледі.

Квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін келесі шеттік есепті қарастырамыз:

$$Bx(0) + Cx(T) = d, d \in R^n, \tag{0.35}$$

мұндағы $B, C\ -\ n \times n$ – тұрақты матрицалар.
(0.26) теңдеуі үшін (0.35) шекаралық шарты бар шеттік есепті зерттеуге және шешуге Δ_N жалпы шешімді қолданамыз.

Үшінші бөлімде сызықтық емес Фредгольм интгралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті шешуге орталау әдісі қолданылады.

Келесі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(t, s, x(s)\big)\, ds\right) \tag{0.36}$$

$$x(0) = x_0 \tag{0.37}$$

Коши шартын және

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{0.38}$$

шеттік шарттарын қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon > 0$ параметрі аз шама, d-өлшемді X және F вектор функциялар, m - өлшемді φ вектор функция, $T > 0$ бекітілген сан.
$X_0(x)$ интегралдық орташа мәнін анықтаймыз

$$X_0(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_0^A X\big(t, x, \varphi_1(t, x)\big)dt, \tag{0.39}$$

мұндағы

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(\,t, s, x)ds,$$

(0.36)-(0.38) есептерін сәйкес орталау есептеріне келтіреміз

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y), \tag{0.40}$$

$$y(0) = x_0, \tag{0.41}$$

$$F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{0.42}$$

немесе, $\tau = \varepsilon t$ баяу уақыт шкаласында,

$$\frac{dy}{dt} = X_0(y), \quad F\big(y(0), y(T)\big) = 0 \tag{0.43}$$

аламыз.

Негізгі нәтижелер Коши есебі үшін орталау әдісін негіздеуден және егер (0.40)-(0.42) есебінің шешімі бар болса, онда ε параметрінің аз мәндерінде (0.39) шеттік есептің (0.40)-(0.42) есептің шешімінің кіші маңайындағы шешімі бар болатынын тұжырымдаудан тұрады.

3.1 ішкі бөлімінде Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі қарастырылады.

Берілген (0.36), (0.37) есебі шешілімділікке зерттелді. Орталау әдісіне негізделген теоремалар келтірілді.

Келесі теорема орынды.

0.9 - теорема. *Келесі шарттар орындалсын:*

(1.1) $X(t,x,y)$ *функциясы* $Q = \{t \geq 0, x \in R^d, y \in R^m\}$ *жиынында анықталады және үзіліссіз, осы облыста* M *тұрақтысымен шенелген,* x *және* y *айнымалыларына қатысты келесі Липщиц шартын қанағаттандырады*

$$|X(t,x,y) - X(t,x_1,y_1)| \leq \alpha(t)(|x - x_1| + |y - y_1|), \tag{0.44}$$

мұндағы $\alpha(t) \geq 0$.

(1.2) $\varphi(t,s,z)$ *функциясы* $Q_1 = \{t \geq 0,\ s \geq 0,\ z \in R^d\}$ *облысында анықталған және үзіліссіз,* $M > 0$ *тұрақтысымен шенелген және Липшиц шартын қанағаттандырады*

$$|\varphi(t,s,z) - \phi(t,s,z_1)| \leq \mu(t,s)|z - z_1|, \tag{0.45}$$

мұндағы $\mu(t,s) \geq 0$. *Сонымен қатар,*

$$\mu(t,s) \le \mu_0, \qquad \int_0^\infty \mu(t,s)ds \le \mu_0,$$

орындалатындай $\mu_0 > 0$ *тұрақтысы бар және*

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(t,s)ds \to 0, t \to \infty; \tag{0.46}$$

сондай-ақ, барлық $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$ *үшін*

$$\varepsilon\left(\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \alpha(s)\,ds + \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \alpha(s)\left(\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \mu(\tau,s)d\tau\right)ds\right) < 1; \tag{0.47}$$

орындалатындай $\bar{\varepsilon} > 0$ *бар;*

(1.3) (0.39) және

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(\int_\tau^\infty |\varphi(\tau,s,x|\,ds\right)d\tau = 0 \tag{0.48}$$

шектері $x \in D$ *(*D *облысы* R^d *тиісті) қатысты бірқалыпты;*
(1.4) (0.40) *орталау жүйесінің* $\tau \in [0,T]$ *үшін* D *облысына тиісті кейбір ρ-аймағында* $y(\tau) = y(\varepsilon\tau)$ *шешімі бар.*

Онда, әрбір $\eta > 0$ *үшін (1) жүйеге қойылған* $x(0) = y(0) = x_0$ *Коши есебінің* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ *үшін* $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ *кесіндісінде анықталатын* $x(t,\varepsilon)$ *жалғыз шешімі бар болатындай және*

$$|y(\varepsilon t) - x(t,\varepsilon)| \le \eta, t \in \left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]. \tag{0.49}$$

теңсіздік орындалатындай $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) \le \bar{\varepsilon}$ *бар болады.*

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін келесі Коши есебін қарастырамыз

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^T \varphi\big(t, s, x(s)\big)ds\right), x(0) = x_0, \qquad (0.50)$$

мұндағы $[0, T]$ белгіленген интервал.

0.10 – теорема. *Келесі шарттар қанағаттандырсын делік:*
(1) $X(t, x, y)$ функциясы

$$Q = \{t \in [0, T], x \in R^d, \qquad y \in D\}$$

(D облысы R^m тиісті) облысында анықталған және

$$|X(t, x, y) - X(t, x_1, y_1)| \le \alpha(t)(|x - x_1| + |y - y_1|), \qquad (0.51)$$

Липщиц шартын, сонымен қатар x, y қатысты сызықты өсу шартын қанағаттандырады; яғни $t \in [0, T], x \in R^d, y \in D$ үшін

$$|X(t, x, y)| \le M(1 + |x| + |y|) \qquad (0.52)$$

орындалатындай $M > 0$ тұрақтысы бар;

(2) $\varphi(t, s, z)$ функциясы $Q_1 = \{t \in [0, T], s \in [0, T],\ z \in R^d\}$ облысында анықталған және үзіліссіз, Q_1 облысында M_1 тұрақтысымен шенелген және z-ке қатысты

$$|\varphi(t, s, z) - \varphi(t, s, z_1)| \le \mu(t, s)|z - z_1| \qquad (0.53)$$

Липшиц шартын қанағаттандырады;

(3)

$$\int_0^T \alpha(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\left(\int_0^T \mu(t, s)\right)dt < 1 \qquad (0.54)$$

теңсіздігі орынды болады;
(4) D облысы центрі координатаның бас нүктесінде орналасқан, радиусы TM_1 болатын $\bar{B}_{TM_1}(0)$ тұйық шарын қамтиды.

Онда барлық $x_0 \in R^d$ үшін (0.50) Коши есебінің x_0 бастапқы мәнінен үзіліссіз тәуелді болатын $[0,T]$ аралығында $x(t,x_0)$ $(x(0,x_0)=x_0)$ жалғыз шешімі бар болады.

3.2 ішкі бөлімінде Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есеп зерттелді.

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімдері қарастырылды.

(0.36)-(0.38) шеттік есебі үшін келесі тұжырымдама орынды болады.

0.11 - теорема. *0.9 - теоремасының (1.1)-(1.3) шарттары орындалсын.* $(0.40)-(0.42)$ *орталау шеттік есебінің* $y=y(\tau)=y(\varepsilon t)$ *шешімі* $X_0(x)$, $F(x,y)$ *функцияларының* $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, *және* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *үзіліссіз дербес туындылары бар болатын кейбір D облысының* ρ*-аймағына тиісті болады делік және*

$$det\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0}\neq 0, \tag{0.55}$$

мұндағы $x_0=y(0)$, $F_0(x_0)=F_0\big(x_0,y(T,x_0)\big)$ *болады.*

Онда $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *үшін(0.42)-(0.43) шеттік есебінің* $x(t,\varepsilon)$ *шешімі болатын* $\varepsilon_0>0$ *бар болады және*

$$|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|\leq\xi(\varepsilon), t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right], \tag{0.56}$$

орындалатындай $\xi=\xi(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$ *функциясын көрсетуге болады.*

Автор 2018 жылдан бастап өмірінің соңы - 2020 жылдың 20 ақпанына дейін ғылыми кеңесшісі болған Математика және математикалық моделдеу институтының Математикалық физика және моделдеу бөлімінің меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Дулат Сыздықбекұлы Джумабаевқа есептің қойылымы, орнатылған нәтижелерді талқылау барысында жасаған пайдалы кеңестері мен ескертулері үшін шынайы алғысын білдіре отырып, рухына тағзым етеді. Автор ғылыми кеңесшілері Математика және математикалық моделдеу институтының бас ғылыми қызметкері, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Сайлаубай Сағымбайұлы Жуматовқа және Т.Г. Шевченко атындағы Киев Ұлттық университетінің Жалпы математика кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Александр Николаевич Станжицкийге диссертациялық жұмыста орнатылған ғылыми нәтижелерді талқылау кезіндегі пайдалы кеңестері, жан-жақты қолдаулары үшін үлкен ризашылығын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне және әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетіне көрсеткен қолдауы үшін және шетелдік ғылыми кеңесшімен жұмыс жасауға мүмкіндік бергені үшін рақмет айтады.

1 ИНТЕГРАЛДЫҚ БӨЛІГІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІН ЗЕРТТЕУДІҢ ЖӘНЕ ШЕШУДІҢ Д.С. ДЖУМАБАЕВ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІ

1.1 Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісінің жалпы схемасы

$[0,T]$ аралығында интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, x(\tau)\big) d\tau \,, t \in [0,T), x \in R^n, \quad (1.1.1)$$

үшін Д.С.Джумабаев параметрлеу әдісінің жалпы схемасын қарастырамыз. Мұндағы $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$ $-$ $[0,T]$ аралығында үзіліссіз $n \times n$ өлшемді матрицалар; f_k: $[0,T] \times R^n \to R^n$, $k = \overline{1,m}$ үзіліссіз вектор-функция, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |x_i|$.

$[0,T]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын және (1.1.1) теңдеуін қанағаттандыратын $x(t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$ вектор-функциясы (1.1.1) теңдеуінің шешімі болып табылады (сондай-ақ $t = 0$ және $t = T$ нүктелерінде (1.1.1) теңдеуді $\dot{x}_{\text{оң}}(0)$, $\dot{x}_{\text{сол}}(0)$ біржақты туындылары қанағаттандырады).

$[0,T]$ аралығын $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ нүктелері арқылы N бөлікке бөліп, осы бөліктеуді Δ_N деп белгілейміз.

Берілген $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$ векторы және $\rho_\lambda > 0$, $\rho > \rho_\lambda$ сандары бойынша

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| \le \rho_\lambda, \;\; r = \overline{1,N}\right\},$$

$$S(x_0(t), \rho) = \{x \in \; \mathbb{R}^{nN} : \; \|x - x_0(t)\| \le \rho \},$$

$$G^0(\rho) = \{(t,x) : \;\; t \in [0,T], \qquad \|x - x_0(t)\| \le \rho\},$$

жиындарын құрамыз, мұндағы бөлікті-тұрақты $x_0(t)$ вектор-функциясы $[0,T]$ аралығында

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)},\ t \in\ [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,N}\ \text{және}\ x_0(T) = \lambda_N^{(0)}$$

теңдіктері арқылы анықталады.

1.1.1 – шарт. *Келесі теңсіздіктер орындалсын делік:*

1) $\|f_k(t,x)\| \le M_k,\ (t,x) \in G^0(\rho),\ M_k -\ const,\ k = \overline{1,m};$

2) $D\bar{h} = \left[\alpha\left(\rho + \left\|\lambda^{(0)}\right\|\right) + K_0\right]\bar{h} < \rho,$

мұндағы $\alpha = \max\limits_{t\epsilon[0,T]}\|A(t)\|,\ \bar{h} = \max\limits_{r=\overline{1,N}}(t_r - t_{r-1})$

$$K_0 = M_k \sum_{k=1}^{m} \max_{t\epsilon[0,T]}\|\varphi_k(t)\| \int_0^T \|\psi_k(\tau)\| d\tau.$$

Келесі жиындарды

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t,x): t \in\ [t_{p-1}, t_p), \|x - x_0(t)\| \le \rho - D(t_p - t)\right\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \{(t,x): t \in\ [t_{N-1}, t_N),\ \ \|x - x_0(t)\| \le \rho - D(t_N - t)\},$$

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho)\,, \qquad \rho_\lambda = \rho - D\bar{h}$$

енгіземіз.

Егер $x(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуін қанағаттандырса және $\big(t, x(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ болса, онда $x(t)$ функциясының $[t_{r-1}, t_r)$ аралығындағы тарылымы $x_r(t),\ r = \overline{1,N}$ келесі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, x_j(\tau)\right) d\tau\,, t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (1.1.2)$$

және

$$\big(t, x_r(t)\big) \in G_r^0(\rho),\ r = \overline{1,N}.$$

$\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ арқылы $x[t]=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t)\big)$ функциялар жүйелерінің кеңістігі белгіленсін, мұндағы $x_r(t)$: $[t_{r-1},t_r)\to R^n$ компоненті үзіліссіз және барлық $r=\overline{1,N}$ үшін $\lim\limits_{t\to t_r-0} x_r(t)$ сол жақты ақырлы шегі бар, нормасы $\|x[\cdot]\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\ \sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|x_r(t)\|$.

Егер $x(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуінің шешімі болса, $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$ ішкі аралықтарында $x(t)$ функциясының тарылымдарынан құралған $x[t]=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t)\big)$ функциялар жүйесі үшін келесі теңдіктер орынды болады:

$$\lim_{t\to t_p-0} x_p(t)=x_{p+1}\big(t_p\big),\qquad p=\overline{1,N-1}. \tag{1.1.3}$$

(1.1.3) теңдіктері Δ_N бөліктеуінің ішкі нүктелеріндегі (1.1.1) теңдеуі шешімінің үзіліссіздік шарттары болып табылады.

1.1.1 - теорема. $x[t]=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t)\big)$ *функциялар жүйесі* $\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^n)$ *кеңісітігіне, ал* $\big(t,x_r(t)\big)$, $r=\overline{1,N}$ *жұбы* $G_r^0(\rho)$ *жиынына тиісті болсын.* $x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$ *функциялары* (1.1.2) *теңдеулер жүйесін және* (1.1.3) *үзіліссіздік шарттарын қанағаттандырады деп ұйғарайық. Онда* $x^*(t)=x_r(t)$, $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$ *және* $x^*(T)=\lim\limits_{t\to T-0}x_N(t)$ *теңдіктері арқылы анықталатын* $x^*(t)$ *функциясы* $[0,T]$ *кесіндісінде үзіліссіз,* $(0,T)$ *интервалында үзіліссіз дифференциалданады*, (1.1.1) *теңдеуін қанағаттандырады және* $\big(t,x^*(t)\big)\in G^0(\Delta_N,\rho)$.

Дәлелдеу. Ұйғарым бойынша $x[t]=\big(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t)\big)\in\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^n)$ болады. Демек, $x^*(T)=\lim\limits_{t\to T-0}x_N(t)$ теңдігі мен (1.1.2) теңдеулер жүйесіне $[0,T]$ кесіндісінде $x^*(t)$ функциясының үзіліссіздігін қамтамасыз етеді. $\big(t,x_r(t)\big)\in G_r^0(\rho)$ ескерсек, $\big(t,x^*(t)\big)$ жұбы $G^0(\Delta_N,\rho)$ жиынына тиісті болады. Сондықтан, $x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$ функциялары (1.1.2) теңдеулер жүйесін қанағаттандырады, ал $x^*(t)$ функциясының үзіліссіз туындылары бар және барлық $t\in(0,T)\backslash\{t_p,p=\overline{1,N-1}\}$ үшін (1.1.1) теңдеуін қанағаттандырады. t_p, $p=\overline{1,N-1}$ нүктелерінде $\dot{x}^*(t)$ функциясы бар және үзіліссіз болуы келесі теңдіктен көрінеді:

$$\lim_{t\to t_p-0}\dot{x}^*(t)=\lim_{t\to t_p-0}\left[A(t)x^*(t)+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\int_0^T\psi_k(\tau)f_k\big(\tau,x^*(\tau)\big)d\tau\right]=$$

$$= A(t_p)x^*(t_p) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t_p) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k(\tau, x^*(\tau)) d\tau = \lim_{t \to t_p + 0} \dot{x}^*(t),$$

$$p = 1, N-1.$$

Бұл қатынас $x^*(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуін Δ_N бөліктеуінің ішкі нүктелерінде де қанағаттандыратындығын көрсетеді.

$\lambda_r \widehat{=} x_r(t_{r-1})$ қосымша параметрлерін енгізу және $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ алмастырулары арқылы

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N} \quad (1.1.4)$$

ішкі интервалдарда параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін және

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1, N} \qquad (1.1.5)$$

бастапқы шарттарын аламыз.

(1.1.4), (1.1.5) есебі параметрлі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі деп аталады.

Сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебінің шешімділік және бір мәнді шешімділік белгілері алынған [70, 1155б.]. Сонымен қатар, осы жұмыста арнайы Коши есебінің шешімдерін табу әдістері ұсынылған. Арнайы Коши есебі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде және сызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ΔN жалпы шешімін табуда қолданылды.

$\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$ параметрінің бекітілген мәнінде $u_r(t, \lambda^*)$, $r = \overline{1, N}$ компоненттері t бойынша анықталу интервалдарында үзіліссіз дифференциалданатын және $\lambda = \lambda^*$ болғанда (1.1.4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (1.1.5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын

$$u[t,\lambda^*] = \big(u_1(t,\lambda^*), u_2(t,\lambda^*), \dots, u_N(t,\lambda^*)\big) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$$

функциялар жүйесі (1.1.4), (1.1.5) арнайы Коши есебінің шешімі болып табылады.

(1.1.2) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің (1.1.4), (1.1.5) параметрлі арнайы Коши есебіне эквиваленттілігін келесі түрде түсіндіреміз. Егер $\tilde{x}[t] = \big(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t)\big)$ функциялар жүйесі (1.1.2) жүйесінің шешімі болса, онда $u\big[t,\tilde{\lambda}\big] = \Big(u_1\big(t,\tilde{\lambda}\big), u_2\big(t,\tilde{\lambda}\big), \dots, u_N\big(t,\tilde{\lambda}\big)\Big)$ функциялар жүйесі $\lambda = \tilde{\lambda} = \big(\,\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in R^{nN}$ болғанда (1.1.4), (1.1.5) арнайы Коши есебінің шешімі болады, мұндағы $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}_r(t_{r-1})$, $u_r\big(t,\tilde{\lambda}\big) = \tilde{x}_r(t) - \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1,N}$. Және керісінше, егер $u[t,\lambda^*] = \big(u_1(t,\lambda^*), u_2(t,\lambda^*), \dots, u_N(t,\lambda^*)\big)$ функциялар жүйесі (1.1.4), (1.1.5) параметрлі арнайы Коши есебінің $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ болғандағы шешімі болса, онда компоненттері $x_r^*(t) = \lambda_r^* + u_r(t,\lambda^*)$, $r = \overline{1,N}$ болатын $x^*[t] = \big(x_1^*(t), x_1^*(t), \dots, x_N^*(t)\big)$ функциялар жүйесі (1.1.2) жүйесінің шешімі болады.

1.2 Параметрлі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі

(1.1.1) теңдеуі үшін шеттік есептерді шешуде (1.1.4), (1.1.5) есебі шешімінің $\lim\limits_{t\to t_r-0} u_r\big(t,\tilde{\lambda}\big), r = \overline{1,N}$ $, r = \overline{1,N}$ шеттік мәндерін қолданамыз. Сондықтан, кесіндідегі арнайы Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)[v_r + \lambda_r] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau\,, t\epsilon[t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}, \quad (1.2.1)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}. \quad (1.2.2)$$

$\tilde{C}([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ арқылы $v[t]=\big(v_1(t),v_2(t),\dots,v_N(t)\big)$ функциялар жүйесінің кеңістігін белгілейміз, мұндағы $v_r\colon[t_{r-1},t_r]\to R^n,\ r=\overline{1,N}$ үзіліссіз, нормасы $\|v[\cdot]\|_3=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|v_r(t)\|$.

Барлық $v\colon[t_{r-1},t_r]\to R^n$ үзіліссіз функциялар кеңістігін $C([t_{r-1},t_r],R^n)$ арқылы белгілейміз, нормасы $\|v\|_4=\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|v(t)\|,\quad r=\overline{1,N}$.

Егер $u[t,\lambda^*]$ және $v[t,\lambda^*]$ функциялар жүйелері сәйкесінше (1.1.4), (1.1.5) және (1.2.1), (1.2.2) есептерінің шешімдері болса, онда келесі теңдіктер орындалады:

$$u_r(t,\lambda^*)=v_r(t,\lambda^*),t\in[t_{r-1},t_r),r=\overline{1,N},\qquad(1.2.3)$$

$$\lim_{t\to t_r-0}u_r(t,\lambda^*)=v_r(t_r,\lambda^*),r=\overline{1,N}.\qquad(1.2.4).$$

$\hat{\lambda}\in S(\lambda^0,\rho_\lambda)$ бекітілген параметрі үшін келесі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dv_r}{dt}=A(t)\big[v_r+\hat{\lambda}_r\big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_k(\tau)f_k\big(\tau,v_j(\tau)+\hat{\lambda}_j\big)d\tau\,,t\epsilon[t_{r-1},t_r],r=\overline{1,N},\qquad(1.2.5)$$

$$v_r(t_{r-1})=0,r=\overline{1,N}.\qquad(1.2.6)$$

Арнайы Коши есебін аламыз. $\rho_v\in(0,\rho-\rho_\lambda)$ үшін

$$S(0,\rho_v)=\big\{v(t)=\big(v_1(\tau),v_2(\tau),\dots,v_N(\tau)\big)\in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})\colon\|v[\cdot]\|_3\le\rho_v\big\},$$

жиынын құрамыз.

1.2.1 – теорема. *1.1.1 - шарты және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(i) $\|f_k(t,x')-f_k(t,x'')\|\le L_k\|x'-x''\|,\ (t,x'),(t,x'')\in G^0(\rho),\ L_k$*-тұрақты,* $k=\overline{1,m}$ *;*

(ii) $(\alpha + K_0 T)\bar{h} < 1$;

(iii) $\bar{h}(\alpha(\rho + \|\lambda^0\|) + K_0 T) \leq \rho_v$.

Онда кез келген $\hat{\lambda} \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін* $S(0, \rho_v)$ *шарында (1.2.5), (1.2.6) арнайы Коши есебінің шешімі болатын жалғыз* $v\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(v_1\left(t, \hat{\lambda}\right), v_2\left(t, \hat{\lambda}\right), \ldots, v_N\left(t, \hat{\lambda}\right)\right)$ *функциялар жүйесі бар болады.*

Дәлелдеу. $v^{(0)}[t] = (0,0,\ldots,0)$ таңдаймыз және сызықтық жәй дифференциалдық теңдеулер үшін

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)\left[v_r + \hat{\lambda}_r\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, v_j^{(\nu-1)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (1.2.7)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1, N}, \qquad (1.2.8)$$

Коши есептерін шешу арқылы $v^\nu\left[t, \hat{\lambda}\right] = \left(v_1^\nu\left(t, \hat{\lambda}\right), v_2^\nu\left(t, \hat{\lambda}\right), \ldots, v_N^\nu\left(t, \hat{\lambda}\right)\right), \nu = 1,2, \ldots$, функциялар жүйелерінің тізбегін құрамыз.

(1.2.7), (1.2.8) арнайы Коши есептері келесі түрде құруға болатын жалғыз шешімге ие:

$$v_r^{(\nu)}\left(t, \hat{\lambda}\right) = \Phi_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau\, \hat{\lambda}_r + \Phi_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau_1) f_k\left(\tau, v_j^{(\nu-1)}(\tau_1) + \hat{\lambda}_j\right) d\tau_1 d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1, N} \quad (1.2.9)$$

мұндағы $\Phi_r(t)$ функциясы

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)x, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1, N}$$

дифференциалдық теңдеуінің іргелі матрицасы.

$v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda}) \in C([t_{r-1},t_r],\ R^n),\ r=\overline{1,N},\ \ \nu=1,2,\dots$ болатындығы көре аламыз.

(1.2.5), (1.2.6) есебін

$$v[t,\hat{\lambda}] = W(v[t,\hat{\lambda}]), \qquad (1.2.10)$$

операторлық теңдеу түрінде көрсетейік, мұндағы

$$W(v[t,\hat{\lambda}]) = (w_1[t,\hat{\lambda}], w_2[t,\hat{\lambda}], \dots, w_N[t,\hat{\lambda}]),$$

$$w_r(t,\hat{\lambda}) = \int_{t_{r-1}}^{t} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau_1, v_j^{(\nu-1)}(\tau_1)+\hat{\lambda}_j\right) d\tau d\tau_1 +$$

$$\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)\left(v_r(\tau)+\hat{\lambda}_r\right) d\tau, \qquad t\in[t_{r-1},t_r], \qquad r=\overline{1,N}.$$

.

$v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda})$ функциялар жиындарын $V_r, r=\overline{1,N}$ арқылы белгілейік.

[116] жұмыстағы

$$\Phi_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau = \int_{t_{r-1}}^{t} P(\tau)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)\int_{t_{r-1}}^{t} P(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1} P(\tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 d\tau + \cdots, \qquad t\in[t_{r-1},t_r],$$
$$r=\overline{1,N},$$

теңсіздігін қолданып,

$$\left\| v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda}) \right\| \le (t_r - t_{r-1})e^{\alpha(t_r-t_{r-1})} \times \Big(\|A(t)\| \|\hat{\lambda}_r\| +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\|\varphi_k(\tau)\| \sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| \left\| f_k\left(\tau_1, v_j^{(\nu-1)}(\tau_1)+\hat{\lambda}_j\right)\right\| d\tau \Big).$$

бағалауды аламыз. Сондықтан $v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda})$ функциясы $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$, аралығында бірқалыпты шенелген.

$$\left\| v_r^{(\nu)}(t_r'',\hat{\lambda}) - v_r^{(\nu)}(t_r',\hat{\lambda}) \right\| \le |t_r'' - t_r'| e^{\alpha|t_r''-t_r'|} \cdot$$

$$\cdot \left(\|A(t)\| \|\hat{\lambda}_r\| + \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k(\tau)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| \left\| f_k\left(\tau_1, v_j^{(\nu-1)}(\tau_1) + \hat{\lambda}_j\right) \right\| d\tau \right)$$

теңсіздігі кез келген $t_r', t_r'' \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$ нүктелері үшін орындалатындықтан $v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda})$ функциялары тең дәрежеде үзіліссіз болады.

Сондықтан, Арцела теоремасы [117] бойынша әрбір V_r, $r = \overline{1,N}$ компакт жиын және $W(v[t,\hat{\lambda}])$ операторы $S(0,\rho_v)$ шарында толықтай үзіліссіз болады.

Кез келген $v[t,\hat{\lambda}] \in S(0,\rho_v)$ үшін

$$\|v[\cdot,\hat{\lambda}]\|_3 = \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| v_r^{(\nu)}(t,\hat{\lambda}) \right\| \le \bar{h}\left(\alpha\left(\rho + \|\lambda^{(0)}\|\right) + K_0 T\right) \le \rho_v$$

болғандықтан $W(v[t,\hat{\lambda}])$ операторы $S(0,\rho_v)$ шарын өз өзіне бейнелейді. Демек, Шаудер қағидасы бойынша $W(v[t,\hat{\lambda}])$ операторының $v[t,\hat{\lambda}] = \left(v_1(t,\hat{\lambda}), v_2(t,\hat{\lambda}), \dots, v_N(t,\hat{\lambda})\right)$ қозғалмайтын нүктесі болады.

Енді қозғалмайтын нүктенің жалғыздығын көрсетейік. $\hat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ үшін (1.2.5), (1.2.6) есебінің $v[t,\hat{\lambda}] \in S(0,\rho_v)$ басқа шешімі бар деп ұйғарайық, яғни

$$\tilde{v}_r(t,\hat{\lambda}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{r-1}}^{t} \varphi_k(\tau_1) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, \tilde{v}_j(\tau,\hat{\lambda}) + \hat{\lambda}_j\right) d\tau d\tau_1 \; +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\left(\tilde{v}_r(\tau_1,\hat{\lambda}) + \hat{\lambda}_r\right) d\tau_1, t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}.$$

Онда келесі бағалаулар орындалады:

$$\left\|v_r(t,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_r(t,\hat{\lambda})\right\| \le \int_{t_{r-1}}^{t} \alpha \left\|v_r(\tau_1,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_r(\tau_1,\hat{\lambda})\right\| d\tau_1 +$$

$$+\sum_{k}^{m} L_k \int_{t_{r-1}}^{t} \|\varphi_k(\tau_1)\| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\psi_k(\tau)\| \left\|v_j(\tau,\hat{\lambda}) - \tilde{v}_j(\tau,\hat{\lambda})\right\| d\tau d\tau_1$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N}$$

және

$$\left\|v[\cdot,\hat{\lambda}] - \tilde{v}_r[\cdot,\hat{\lambda}]\right\| \le (\alpha + K_0 T)\, \bar{h}\, \left\|v[\cdot,\hat{\lambda}] - \tilde{v}_r[\cdot,\hat{\lambda}]\right\|_3.$$

(ii) шарттан барлық $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$ үшін $v(\cdot,\hat{\lambda}) = \tilde{v}_r(\cdot,\hat{\lambda})$ шығады. 1.2.1 - теорема дәлелденді.

1.3 Арнайы Коши есебін итерациялық әдісімен шешу

Бұл бөлімшеде (1.2.5), (1.2.6) арнайы Коши есебін шешуде димпфирлеуші көбейткіштері бар итерациялық процесттерді қолдану қарастырылады.

$\lambda = \hat{\lambda}$ болғанда (1.2.5) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі мен (1.2.6) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $v[t,\hat{\lambda}] = \left(v_1(t,\hat{\lambda}), v_2(t,\hat{\lambda}), \ldots, v_N(t,\hat{\lambda})\right) \in \tilde{C}([0,T], \Delta N, R^{nN})$ функциялар жүйесі (1.2.5), (1.2.6) арнайы Коши есебінің шешімі болып табылады. $\hat{v}^{(0)}[t] = \left(\hat{v}_1^{(0)}(t), \hat{v}_2^{(0)}(t), \ldots, \hat{v}_N^{(0)}(t)\right) \in \tilde{C}([0,T], \Delta N, R^{nN})$функциялар жүйесін, $\rho_v > 0$ санын және

$$S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \rho_v\right) = \left\{v[t] \in \tilde{C}([0,T], \Delta N, R^{nN}) : \left\|v[\cdot] - v^{(0)}[\cdot]\right\| < \rho_v\right\}$$

шарын таңдап аламыз. (1.2.5), (1.2.6) есебін шешу үшін оны эквивалентті операторлық теңдеу түрінде жазып және [69, 345б.; 114, 96-97 бб.] жұмыстың нәтижелерін пайдаланамыз.

$$\hat{x}_0(t) = \hat{\lambda}_r + \hat{v}_r^{(0)}(t), \;\; t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N},$$

теңдігі арқылы $\hat{x}_0(t)$ бөлікті-үзіліссіз функциясын анықтаймыз және

$$G^0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - \hat{x}_0(t)\| < \rho\}, \qquad \rho > \rho_v$$

жиынын енгіземіз.

1.3.1 - шарт *$f(t,x)$ функциясының $G^0(\rho)$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз $f'_x(t,x)$ дербес туындысы бар.*

Келесі кеңістіктерді енгіземіз:

$$X = v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t)\big) \in \tilde{C}([0,T], \Delta_N, R^{nN}): v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N},$$

$$Y = \tilde{C}([0,T], \Delta_N, R^{nN}).$$

(1.2.5), (1.2.6) арнайы Коши есебін сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде қарастырамыз

$$Hv[t] + F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = 0, \tag{1.3.1}$$

мұндағы $H: X \to Y$ сызықтық операторы

$$Hv[t] = \omega^{(1)}[t],$$

$$\omega^{(1)}[t] = \Big(\omega_1^{(1)}(t), \omega_2^{(1)}(t), \ldots, \omega_N^{(1)}(t)\Big),$$

$$\omega_r^{(1)}(t) = \dot{v}_r(t) - A(t)v_r(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N}.$$

түрінде анықталады.

H операторының анықталу облысы

$$D(H) = \big\{v[t] = \big(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_r(t)\big) \in X\big\},$$

мұндағы $v_r(t)$ $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады.

Ал $F\big(v[t], \hat{\lambda}\big)$ сызықтық емес операторы келесі түрде болады:

$$F\big(v[t], \hat{\lambda}\big) = \omega^{(2)}\big[t, \hat{\lambda}\big],$$

$$\omega^{(2)}[t,\hat{\lambda}] = \left(\omega_1^{(2)}(t,\hat{\lambda}), \omega_2^{(2)}(t,\hat{\lambda}), \dots, \omega_N^{(2)}(t,\hat{\lambda})\right),$$

$$\omega_r^{(2)}(t,\hat{\lambda}) = -A(t)\hat{\lambda}_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}.$$

1.3.1 – шарты $F'_v(v[t],\hat{\lambda})$ Фреше туындысының $S(\hat{v}^{(0)}[t],\rho_v)$ шарында бар болуы мен бірқалыпты үзіліссіздігін қамтамасыз етеді [115, 95б.].

Фреше туындысы келесі түрде болады:

$$F'_v(\tilde{v}[t],\hat{\lambda})h = \omega^{(3)}[t,\hat{\lambda}],$$

$$\omega^{(3)}[t,\hat{\lambda}] = \left(\omega_1^{(3)}(t,\hat{\lambda}), \omega_2^{(3)}(t,\hat{\lambda}), \dots, \omega_N^{(3)}(t,\hat{\lambda})\right),$$

$$\omega_r^{(3)}(t,\hat{\lambda}) = -\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f'_{k,x}(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j) h_j(\tau) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N},$$

мұндағы $h[t] = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)) \in X$ функциялар жүйесінің $h_r: [t_{r-1}, t_r] \to R^n, r = \overline{1,N}$ компоненттері үзіліссіз.

$H + F'_v(\tilde{v}[t],\hat{\lambda}): X \to Y$ тұйық сызықтық операторының шенелген кері операторы бар болады, сонда тек сонда ғана, егер

$$\left(H + F'_v(\tilde{v}[t],\hat{\lambda})\right)h = g[t], \qquad g[t] = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_N(t)) \in Y, \quad (1.3.2)$$

операторлық теңдеуі бір мәнді шешілімді болады.

(1.3.2) теңдеуі келесі сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебіне

$$\frac{dh_r(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f'_{k,x}(\tau, v_j(\tau) + \hat{\lambda}_j) h_j(\tau) d\tau +$$

$$+A(t)h_r(t)+g_r(t), t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}, \qquad (1.3.3)$$

$$h_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N} \qquad (1.3.4)$$

эквивалентті.

$L(Y,X)$ сызықтық шенелген $\Lambda: Y \to X$ операторларының қандай да бір индукцияланған нормалы кеңістігі болсын.

1.3.1 - анықтама *(1.3.3), (1.3.4) арнайы Коши есебі қисынды шешілімді деп аталады, егер кез келген* $g[t] \in Y$ *үшін осы есептің жалғыз* $h[t] \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ *шешімі бар болса және осы шешім үшін* $\|h[\cdot]\|_4 \leq \gamma \|g[\cdot]\|_4$ *теңсіздігі орындалатын болса, мұндағы* γ *тұрақтысы* $g[t]$ *функциясынан тәуелсіз.*

γ саны (1.3.3), (1.3.4) есебінің қисынды шешімділік тұрақтысы деп аталады.

Келесі тұжырым орынды.

1.3.1 - теорема *Келесі шарттар орындалсын делік:*

1) $F_v'(\tilde{v}[t], \hat{\lambda})$ *Фреше туындысы* $S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_v)$ *шарында бірқалыпты үзіліссіз;*

2) барлық $\tilde{v}[t] \in S(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_v)$ *үшін* $H + F_v'(\tilde{v}[t], \hat{\lambda}): X \to Y$ *сызықтық операторының шенелген кері операторы бар және*

$$\left\| \left[H + F_v'(\tilde{v}[t], \hat{\lambda})\right]^{-1} \right\|_{L(Y,X)} \leq \hat{\gamma},$$

мұндағы $\hat{\gamma}$ *-тұрақты*;

3) $\hat{\gamma} \cdot \left\| H\hat{v}^{(0)}[\cdot] + F_v'(\hat{v}^{(0)}[\cdot], \hat{\lambda}) \right\|_1 < \hat{\rho}_v$.

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = -\frac{1}{\alpha_k}\left[H + F_v'(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda})\right]^{-1}\left[H\hat{v}^{(k)}[t] + F(\hat{v}^{(k)}[t], \hat{\lambda})\right] +$$

$$+\hat{v}^{(k)}[t], \;\; k = 0,1,2,..., \qquad (1.3.5)$$

итерациялық процесімен анықталған $\{\hat{v}^{(k)}[t]\}$, $k = 0,1,2,...$ *элементтер тізбегі* $v[t, \hat{\lambda}]$ *функциялар жүйесіне, яғни (1.3.1) операторлық теңдеуінің*

$S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\right)$ *шарындағы оқшауланған шешіміне жинақталатындай* $\alpha_k \geq 1,\ \ k = 0,1,2,\ldots$ *сандары бар болады және келесі бағалау орындалады:*

$$\left\|v\left[\cdot,\hat{\lambda}\right] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_1 \leq \gamma\left\|H\hat{v}^{(0)}[t] + \ F'_v\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\lambda}\right)\right\|_1. \qquad (1.3.6)$$

$\left\{\hat{v}^{(k)}[t]\right\}$ тізбегінің $v\left[t,\hat{\lambda}\right]$ функциялар жүйесіне, яғни (1.3.1) теңдеуінің $S\left(\hat{v}^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\right)$ шардағы оқшауланған шешіміне жинақталатындығы 2-ші теорема [114, 97б.] мен 3-ші теоремада [115, 93б.] ұсынылған. (1.3.6) бағалау 1-ші теореманың [117] бағалауына ұқсас орнатылады.

(1.3.1) оператолық теңдеуі мен (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есебінің өзара байланысынан және 1.3.1 – теоремадан келесі тұжырымды аламыз.

1.3.2 – теорема. *1.3.1 - шарты орындалсын, (1.3.3), (1.3.4) арнайы Коши есебі барлық* $\tilde{v}[t] \in S\left(v^{(0)}[t],\hat{\rho}_v\right)$ *үшін* $\hat{\gamma}$ *тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын және келесі теңсіздік орынды болсын:*

$$\hat{\gamma}\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\left\|\dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - A(t)\left(\hat{v}_r^{(0)}(t)+\lambda_r\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)f_k\left(\tau,\hat{v}_j^{(0)}(\tau)+\lambda_j\right)d\tau\right\| < \hat{\rho}_v.$$

Онда

$$\hat{v}^{(k+1)}[t] = \hat{v}^{(k)}[t] + \Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right], k = 0,1,2, \qquad (1.3.7)$$

итерациялық процесімен анықталатын $\left\{\hat{v}_r^{(k)}[t]\right\}, k = 0,1,2,\ldots$ *элементтер тізбегі, мұндағы*

$$\Delta v^{(k)}\left[t,\hat{\lambda}\right] = \left(\Delta v_1^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right),\Delta v_2^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right),\ldots,\Delta v_N^{(k)}\left(t,\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_N\right)\right)$$

функциялар жүйесі

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = A(t)\Delta v_r + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)f'_{k,x}\left(\tau,v_j^{(k)}(\tau)+\hat{\lambda}_j\right)\Delta v_j(\tau)d\tau -$$

$$\frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{dv_r^{(k)}(t)}{dt} - A(t)\left[v_j^{(k)}(t) + \hat{\lambda}_r\right]\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, v_j^{(k)}(\tau) + \hat{\lambda}_j\right) d\tau\right),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,N}, \quad (1.3.8)$$

$$\Delta v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,N}, k = 0,1,2, \dots, \quad (1.3.9)$$

сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебінің шешімі, $S\left(\hat{v}^{(0)}[t], \hat{\rho}_v\right)$ *шарына тиісті болатындай және (1.2.5), (1.2.6) есебінің оқшауланған шешімі -* $v\left[t, \hat{\lambda}\right]$ *функциялар жүйесіне жинақталатындай* $\alpha_k \geq 1$, $k = 0,1,2, \dots$ *сандары бар болады және келесі бағалау орындалады:*

$$\left\|v\left[\cdot, \hat{\lambda}\right] - \hat{v}^{(0)}[\cdot]\right\|_3 \leq$$

$$\leq \hat{\gamma} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \left\| \dot{\hat{v}}_r^{(0)}(t) - A(t)\left(\hat{v}_r^{(0)}(t) + \lambda_r\right) \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(\tau) f\left(\tau, \hat{v}_j^{(0)}(\tau) + \lambda_j\right) d\tau \right\|. \quad (1.3.10)$$

Мысал. [0,2] аралығында сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \varphi(t)\int_0^T \psi(\tau) f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau + f_0(t), \qquad t \in [0,2], \quad (1.3.11)$$

мұндағы

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^3 - 1 & t^2 \end{pmatrix}, \varphi(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ t^2 & t+3 \end{pmatrix}, \psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\big(\tau, x(\tau)\big) = \begin{pmatrix} \tau x_1^2(\tau) + \tau^2 x_2^2(\tau) \\ (\tau+1)x_1(\tau) + (r^3-1)x_2(\tau) \end{pmatrix},$$

$$f_0(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi-12}{\pi^2} - cos(\pi t) - t\left(\dfrac{28}{9\pi^2}+1\right) + \pi cos(\pi t) \\ \dfrac{2(t+3)(\pi-6)}{\pi^2} - t^2\left(\dfrac{28}{9\pi^2}+1\right) - t^2 cos(\pi t) - \pi sin(\pi t) - sin(\pi t)(t^3-1) \end{pmatrix}.$$

$(1.3.11)$ теңдеудің дәл шешімі

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} sin(\pi t) \\ cos(\pi t) \end{pmatrix}.$$

$[0,2]$ аралығын екі бөлікке бөліп, бөліктеуді Δ_2 арқылы белгілейміз, яғни $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2$. $\lambda_1 = x_1(t_0),\ \lambda_2 = x_2(t_1)$ параметрлерін енгіземіз және $v_1 = x_1(t) - \lambda_1,\ v_2 = x_2(t) - \lambda_2$ алмастыруын жасаймыз. Содан соң сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін кесіндідегі

$$\frac{dv_r}{dt} = \varphi(t)\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)f\big(\tau, v_j(\tau)+\lambda_j\big)d\tau +$$

$$+A(t)(v_r+\lambda_r) + f_0(t), \qquad t\in[t_{r-1},t_r], r=\overline{1,2}, \qquad (1.3.12)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,2} \qquad (1.3.13)$$

арнайы Коши есебін аламыз. (1.3.12), (1.3.13) есебі шешімнің бастапқы жуықтауы ретінде $v^{(0)}[t] = (0,0)$ функциялар жүйесін таңдаймыз және есепті шешу үшін (1.3.7) итерациялық процесін қолданамыз.

Келесі сызықтық арнайы Коши есебін шешеміз:

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = A(t)\Delta v_r + \varphi(t)\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)f'_x\big(\tau,\hat{\lambda}_j\big)\Delta v_j(\tau)d\tau$$

$$+A(t)\hat{\lambda}_r + \varphi(t)\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)f\big(\tau,\hat{\lambda}_j\big)d\tau, t\in[t_{r-1},t_r], r=\overline{1,2}, (1.3.14)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,2} \qquad (1.3.15)$$

және оның $\Delta v^{(0)}[t] = \left(\Delta v_1^{(0)}(t), \Delta v_2^{(0)}(t)\right)$ шешімін табамыз. (1.3.14), (1.3.15) арнайы Коши есебі шешімінің бірінші жуықтауын $v_r^{(1)}(t) = \Delta v_r^{(0)}(t), r = \overline{1,2}$ теңдіктерімен анықтаймыз.

$$\frac{d\Delta v_r}{dt} = A(t)\Delta v_r + \varphi(t)\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)f_x'\left(\tau, v_j^{(k)} + \hat{\lambda}_j\right)\Delta v_j(\tau)d\tau$$

$$+\frac{dv_r^{(k)}(t)}{dt} + A(t)\left[v_r^{(k)}(t) + \hat{\lambda}_r\right] +$$

$$+\varphi(t)\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)f\left(\tau, v_j^{(k)} + \hat{\lambda}_j\right)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,2}, \quad (1.3.16)$$

$$\Delta v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,2}, k = \overline{1,4} \qquad (1.3.17)$$

сызықтық арнайы Коши есебін шешеміз және (1.3.12), (1.3.13) арнайы Коши есебінің $(k+1)$-ші жуықтауын келесі теңдікпен анықтаймыз:

$$v_r^{(k+1)}(t) = v_r^{(k)}(t) + \Delta v_r^{(k)}(t), \ k = \overline{1,4}.$$

1 – кесте. 1 - итерация үшін (1.3.12), (1.3.13) арнайы Коши есебінің сандық шешімі

$\hat{t}$	${v_{(1)}^{(1)}}_1(\hat{t})$	${v_{(1)}^{(1)}}_2(\hat{t})$	$\hat{t}$	${v_{(2)}^{(1)}}_1(\hat{t})$	${v_{(2)}^{(1)}}_2(\hat{t})$
0.0000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000	0.0000000000	0.0000000000
0.0625	0.1672906062	−0.0997288225	1.0625	−0.1714987527	−0.0370329738
0.1250	0.3252284900	−0.2367077874	1.1250	−0.3358124340	−0.0351124819
0.1875	0.4666428544	−0.4084286610	1.1875	−0.4856464522	0.0037983714
0.2500	0.5849438131	−0.6111592370	1.2500	−0.6142546543	0.0764650909
0.3125	0.6743685801	−0.8400913950	1.3125	−0.7156876587	0.1785581748
0.3750	0.7301953620	−1.0895378508	1.3750	−0.7850066757	0.3048934199
0.4375	0.7489162258	−1.3531717224	1.4375	−0.8184529171	0.4497378504
0.5000	0.7283616696	−1.6243017792	1.5000	−0.8135635486	0.6071863017
0.5625	0.6677713381	−1.8961754455	1.5625	−0.7692258749	0.7716203324
0.6250	0.5678072007	−2.1623014060	1.6250	−0.6856617536	0.9382731078
0.6875	0.4305074681	−2.4167841314	1.6875	−0.5643336223	1.1039446263
0.7500	0.2591814570	−2.6546638795	1.7500	−0.4077612307	1.2679470552

0.8125	0.0582474057	−2.8722580037	1.8125	−0.2192329201	1.4334204115
0.8750	−0.1669832195	−3.0675028285	1.8750	−0.0023849462	1.6092629011
0.9375	−0.4105702558	−3.2403003823	1.9375	0.2393968338	1.8131015559
1.0000	−0.6662529657	−3.3928813898	2.0000	0.5038331919	2.0760491787

1-ші кестеде (1.3.12), (1.3.13) есептің сандық шешімі 1,393 жуықтауымен берілген, яғни

$$\left\|v^{(1)}(\hat{t})-v^{*}(\hat{t})\right\| \leq 1{,}393.$$

2 – кесте. 2 - итерация үшін (1.3.12), (1.3.13) арнайы Коши есебінің сандық шешімі

$\hat{t}$	${v_{(1)}^{(2)}}_1(\hat{t})$	${v_{(1)}^{(2)}}_2(\hat{t})$	$\hat{t}$	${v_{(2)}^{(2)}}_1(\hat{t})$	${v_{(2)}^{(2)}}_2(\hat{t})$
0.0000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000	0.0000000000	0.0000000000
0.0625	0.1879059475	−0.0400222512	1.0625	−0.1889934728	0.0046784388
0.1250	0.3678351574	−0.1176215911	1.1250	−0.3705704014	0.0473741620
0.1875	0.5325884300	−0.2305281090	1.1875	−0.5374995934	0.1259581385
0.2500	0.6755357925	−0.3751437811	1.2500	−0.6831106914	0.2369609697
0.3750	0.8738250780	−0.7393543091	1.3750	−0.8879901498	0.5365760032
0.4375	0.9208625774	−0.9465988903	1.4375	−0.9388331781	0.7131214286
0.5000	0.9297995888	−1.1613404178	1.5000	−0.9518185967	0.8984838355
0.5625	0.8998920302	−1.3762741187	1.5625	−0.9261112673	1.0856515491
0.6250	0.8318585575	−1.5841627389	1.6250	−0.8623161059	1.2678329783
0.6875	0.7278476117	−1.7781366499	1.6875	−0.7624327546	1.4388551096
0.7500	0.5913479276	−1.9519871628	1.7500	−0.6297458977	1.5936132582
0.8125	0.4270454161	−2.1004440717	1.8125	−0.4686494428	1.7286004232
0.8750	0.2406312244	−2.2194299634	1.8750	−0.2844016064	1.8425721086
0.9375	0.0385674149	−2.3062860218	1.9375	−0.0828043328	1.9374502332
1.0000	−0.172182002	−2.3599670411	2.0000	0.1302073234	2.0196536879

2-ші кестеде (1.3.12), (1.3.13) есептің сандық шешімі 0,36 жуықтауымен берілген, яғни

$$\left\|v^{(2)}(\hat{t})-v^{*}(\hat{t})\right\| \leq 0{,}36.$$

3 – кесте. 5 - итерация үшін (1.3.12), (1.3.13) арнайы Коши есебінің сандық шешімі

$\hat{t}$	${v_{(1)}^{(5)}}_1(\hat{t})$	${v_{(1)}^{(5)}}_2(\hat{t})$	$\hat{t}$	${v_{(2)}^{(5)}}_1(\hat{t})$	${v_{(2)}^{(5)}}_2(\hat{t})$
0.0000	0.0000000000	0.0000000000	1.0000	0.0000000000	0.0000000000
0.0625	0.1950903218	−0.0192147199	1.0625	−0.1950903216	0.0912147203

0.1250	0.3826834320	−0.0761204681	1.1250	−0.3826834315	0.0761204690
0.1875	0.5555702325	−0.1685303885	1.1875	−0.5555702318	0.1685303902
0.2500	0.7071067806	−0.2928932199	1.2500	−0.7071067796	0.2928932224
0.3125	0.8314696117	−0.4444297683	1.3125	−0.8314696104	0.4444297717
0.3750	0.9238795318	−0.6173165692	1.3750	−0.9238795304	0.6173165734
0.4375	0.9807852797	−0.8049096798	1.4375	−0.9807852782	0.8049096848
0.6250	0.9238795321	−1.3826834347	1.6250	−0.9238795301	1.3826834409
0.6875	0.8314696121	−1.5555702355	1.6875	−0.8314696097	1.5555702420
0.7500	0.7071067812	−1.7071067838	1.7500	−0.7071067781	1.7071067913
0.8125	0.5555702333	−1.8314696149	1.8125	−0.5555702289	1.8314696252
0.8750	0.3826834329	−1.9238795350	1.8750	−0.3826834264	1.9238795517
0.9375	0.1950903322	−1.9807852827	1.9375	−0.1950903129	1.9807853125
1.0000	0.0000000012	−2.0000000019	2.0000	0.0000000146	2.0000000566

3-ші кестеде (1.3.12), (1.3.13) есептің сандық шешімі $5.656 \cdot 10^{-8}$ жуықтауымен берілген, яғни

$$\left\| v^{(5)}(\hat{t}) - v^{*}(\hat{t}) \right\| \leq 5.656 \cdot 10^{-8} .$$

2 ИНТЕГРАЛДЫҚ БӨЛІГІ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС БОЛАТЫН ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ Δ_N ЖАЛПЫ ШЕШІМІ ЖӘНЕ ОНЫ ШЕТТІК ЕСЕПКЕ ҚОЛДАНУ

2.1 Сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Δ_N жалпы шешімінің анықтамасы және оның қасиеттері

Алдымен, (1.1.1) интегралдық бөлігі сызықтық емес болатын Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін жалпы шешімнің жаңа ұғымы енгізіледі. 1.1 ішкі бөлімінде параметрлеу әдісі көмегімен (1.1.1) теңдеуі (1.1.4), (1.1.5) параметрлі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебіне келтірілді.

(1.1.4), (1.1.5) және (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есептерінің арасындағы байланысты ескере отырып, біз келесі анықтаманы береміз.

2.1.1 - анықтама. *1.1.1 - теореманың шарттары орындалсын және* $v[t,\lambda] = \big(v_1(t,\lambda),\ v_2(t,\lambda), \dots, v_N(t,\lambda)\big) \in S(0,\rho_v)$ *функциялар жүйесі (1.2.1), (1.2.2)* $\lambda \in S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)$ *параметрлі арнайы Коши есебінің шешімі болсын делік.*

Онда

$$x(\Delta_N,t,\lambda) = \lambda_r + v_r(t,\lambda),\ t \in [t_{r-1},t_r],\ \ r = \overline{1,N}$$

және

$$x(\Delta_N,T,\lambda) = \lambda_N + v_N(T,\lambda)$$

теңдіктерімен анықталатын $x(\Delta_N,t,\lambda)$ *функциясы (1.1.1) теңдеудің* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

1.1.1 - теорема шарттары(1.1.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N,\rho)$ жиынында Δ_N жалғыз жалпы шешімі бар болатындығын қамтамасыз етеді.

Кез келген $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N) \in S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)$ параметрі үшін $x(\Delta_N,t,\lambda)$ функциясы барлық $t \in (0,T)\backslash\{t_p, p = \overline{1,N-1}\}$ мәндері үшін (1.1.1) теңдеуді қанағаттандырады және $\big(t,x(\Delta_N,t,\lambda)\big)$ жұбы $G^0(\Delta_N,\rho)$ жиынына тиісті болады.

1.2.1 – теоремасының шарттары орындалсын және $x(\Delta_N,t,\lambda)$ функциясы (1.1.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N,\rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі болсын. Келесі тұжырым орынды.

2.1.1 – теорема. *$t = t_p,\ p = \overline{1, N-1}$ мүмкін үзіліс нүктелері болатын бөлікті-үзіліссіз $\tilde{x}(t)$ функциясы $[0, T]$ аралығында берілсін және $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ болсын. $\tilde{x}(t)$ функциясының үзіліссіз туындысы бар болсын және (1.1.1) теңдеуін барлық $t \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$ үшін қанағаттандырсын деп жорамалдайық.*

Онда $x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big) = \tilde{x}(t)$ теңдігі барлық $t \in [0, T]$ үшін орындалатындай жалғыз $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big),\ r = \overline{1, N}$ бар болады.

Дәлелдеу $\tilde{x}_r(t)$ функциясы $\tilde{x}(t)$ функциясының $[t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, N}$ аралығындағы тарылымы болсын және $\tilde{x}[t] = \big(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t)\big)$. Теореманың ұйғарымдарынан $\tilde{x}_r(t),\ r = \overline{1, N}$ функциялары (1.1.2) теңдеуді қанағаттандырады және $\big(t, \tilde{x}_r(t)\big) \in G_r^0(\rho),\ r = \overline{1, N}$. $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}(t_{r-1})$ деп алайық. Мұндағы $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ екендігі анық. 1.1.1 - теорема бойынша $v\big[t, \tilde{\lambda}\big] = \Big(v_1\big(t, \tilde{\lambda}\big), v_2\big(t, \tilde{\lambda}\big), \dots, v_N\big(t, \tilde{\lambda}\big)\Big)$ функциялар жүйесі $\lambda = \tilde{\lambda}$ болғанда (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есебінің $S(0, \rho_v)$ шарындағы жалғыз шешімі болады және $\Big(t, \tilde{\lambda}_r + v_r\big(t, \tilde{\lambda}\big)\Big) \in G_r^0(\rho), r = \overline{1, N}$.

2.1.1 - анықтамадан және (1.1.2) теңдеулер мен (1.1.4), (1.1.5) арнайы Коши есебі арасындағы қатынастардан $t \in [t_{r-1}, t_r]$ үшін $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + v_r\big(t, \tilde{\lambda}\big) = x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big),\ r = \overline{1, N}$ және $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + v_N\big(T, \tilde{\lambda}\big) = x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big)$ болатындығы шығады.

Енді $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ жалғыз болатындығын көрсетейік. Барлық $t \in [0, T]$ үшін $\tilde{x}(t) = x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big)$ орындалатындай басқа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ бар болады деп кері жоримыз. Онда, 1.1.1 - анықтамаға сәйкес, $t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$ үшін $\tilde{x}(t) = \lambda_r^* + v_r(t, \lambda^*)$ және $\tilde{x}(T) = \lambda^*{}_N + v_N(T, \lambda^*)$ теңдіктерін аламыз, мұндағы $v[t, \lambda^*] = \big(v_1(t, \lambda^*), v_2(t, \lambda^*), \dots, v_N(t, \lambda^*)\big) \in S(0, \rho_v)$ функциялар жүйесі $\lambda = \lambda^*$ болғанда (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есебінің шешімі. (1.2.2) бастапқы шарттарды пайдаланып, барлық $r = \overline{1, N}$ үшін $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}(t) = \lambda_r^* + v_r(t_{r-1}, \lambda^*) = \lambda_r^*$ теңдігін аламыз. 2.1.1 - теорема дәлелденді.

2.1.1 - салдар *$x^*(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуінің шешімі және $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ болсын. Онда $x(\Delta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ теңдігі барлық $t \in [0, T]$ үшін орындалатындай жалғыз $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_r^*) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ бар болады.*

Мысал. Келесі теңдеуді қарастырайық [52, 39 б.]

$$z'' = -\frac{1}{6}t + \int_0^1 t\,\tau\, z^4(\tau)d\tau. \qquad (2.1.1)$$

$z^*(t) = t$ (2.1.1) теңдеудің дәл шешімі. Бұл теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^1 K(t,\tau)\, f\big(\tau, x(\tau)\big) + f_0(t),$$

мұндағы

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t\tau \end{pmatrix}, f\big(t, x(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^4(t) \end{pmatrix}, f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{6}t \end{pmatrix}.$$

Δ_6 арқылы $[0,1]$ интервалын тең алты бөлікке бөлуді белгілейік және $t_r = (r-1)h,\ h = \frac{1}{6},\ r = \overline{1,6}$ түрде анықталады. $\lambda_r = x(t_{r-1})$ параметрлерін енгіземіз және $u_r(t) = x(t) - \lambda_r,\ t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1,6}$ алмастыруларын жасаймыз. Нәтижесінде

$$\frac{dv_r}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau) f\big(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau$$

$$A(t)(v_r + \lambda_r) + f_0(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad (2.1.2)$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1,6}, \qquad (2.1.3)$$

арнайы Коши есебін аламыз.

$\rho_\lambda = 2$ және

$$\lambda^{(0)} = \big((0.5, 0.5), (0.2, 0.4), (0.1, 0.6), (0.35, 0.45), (0.2, 0.55), (0.1, 0.5)\big).$$

аламыз. [0,1] аралығында $x_0(t)$ бөлікті-тұрақты функциясы

$$x_0(t) = \lambda_r^{(0)}, t \in [t_{r-1}, t_r], r = \overline{1,6}$$

теңдіктерімен анықталады және

$$G_0(\rho) = (t,x): t \in [0,1], \|x - x_0(t)\| < \rho, \rho = 5$$

жиынын құрамыз.

$$\|A(t)\| \leq 1, \qquad \|K(t,\tau)\| \leq 1, \qquad \|f(t,x)\| \leq 1,$$

$$\|f_0(t)\| \leq \frac{1}{6}, \qquad L = 4,$$

теңсіздіктері 1.1.1 - теореманың шарттарын қанағаттандырады. Демек, $\rho_v = 3$ болғанда кез келген $\hat{\lambda} \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ үшін $S(0, \rho_v)$ шарына тиісті $v\big[t, \hat{\lambda}\big]$ функциялар жүйесі (2.1.2), (2.1.3) арнайы Коши есебінің шешімі болады.

Мысал ретінде

$$\hat{\lambda} = \big((0.8{,}0.8), (-0.5{,}0.6), (-0.8{,}0.4), (0.6{,}0.5), (0.7{,}0.5), (0.7{,}0.5)\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big),$$

алсақ, онда

$$v\big[t, \hat{\lambda}\big] = \big((t - 0.8{,}0.2), (t + 0.5{,}0.4), (t + 0.8, 0.6), (t - 0.7{,}0.5), (t - 0.7{,}0.5)\big) \in S(0, \rho_v)$$

(2.1.2), (2.1.3) арнайы Коши есебінің шешімі болады.

2.2 Δ_N жалпы шешімін сызықтық емес шеттік есептерді шешуде қолдану

Бұл бөлімде біз (1.1.1) теңдеуі мен

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2.2.1}$$

шекаралық шартты қарастырамыз, мұндағы $g: R^n \times R^n \to R^n$ үзіліссіз.

(1.1.1) теңдеудің Δ_N жалпы шешімі (1.1.1), (2.2.1) шеттік есебінің шешімділігін $\lambda_r \in R^n, r = \overline{1, N}$ параметреріне қатысты сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімділігіне тар мүмкіндік береді. Ол үшін (1.1.3) үзіліссіздік шарттарын мына түрде жазамыз:

$$\lim_{t \to t_p - 0} x(\Delta_N, t, \lambda) - x\big(\Delta_N, t_p, \lambda\big) = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

мұндағы $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы (1.1.1) теңдеудің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі. Δ_N – жалпы шешімін (2.2.1) шекаралық шартқа және (1.1.3) үзіліссіздік шарттарын қоя отырып, сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$g[\lambda_1, \lambda_N + v_N(T, \lambda)] = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\lambda_p + v_p\big(t_p, \lambda\big) - \lambda_{p+1} = 0, p = \overline{1, N-1}. \tag{2.2.3}$$

(2.2.2), (2.2.3) теңдеулер жүйесін мына түрде жазамыз

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \qquad (2.2.4$$

Таңдалған Δ_N бөліктеуі үшін 1.1.1 - теореманың шарттары орындалады және $x(\Delta_N, t, \lambda)$ функциясы (1.1.1) теңдеудің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиыныдағы Δ_N жалпы шешімі болсын делік.

2.2.1 - теорема $x^*(t)$ *функциясы (1.1.1), (2.2.1) есебінің шешімі және* $\big(t, x^*(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ *болсын. Онда компоненттері* $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1}),\ r = \overline{1, N}$ *анықталатын* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ *векторы (2.2.4) теңдеуінің шешімі болады және* $\lambda^* \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$. *Және керісінше, егер* $\tilde{\lambda} = \big(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N\big) \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ *(2.2.4) теңдеуінің шешімі болса, онда* $\tilde{x}(t) = x\big(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}\big)$ *функциясы (1.1.1), (2.2.1) есебінің шешімі болады және* $\big(t, \tilde{x}(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Дәлелдеу Егер $x^*(t)$ функциясы (1.1.1), (2.2.1) есебінің шешімі болса, онда

$$g[x^*(0), x^*(T)] = 0, \tag{2.2.5}$$

$$\lim_{t \to t_p - 0} x^*(t) - x^*\big(t_{p+1}\big) = 0,\ \ p = \overline{1, N-1}, \tag{2.2.6}$$

компоненттері $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1}),\ r = \overline{1, N}$ болатын $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ векторын алайық. $\big(t, x^*(t)\big)$ жұбының $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынның тиістілігі барлық $\lambda_r^* \in S\left(\lambda_r^{(0)}, \rho_\lambda\right), r = \overline{1, N}$, қамтамасыз етеді. 1.1.1 - теорема бойынша (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есебінің $v[t, \lambda^*] \in S(0, \rho_v)$ жалғыз шешімі болады. $x^*(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуді қанағаттандыратындықтан 2.1.1 – теорема бойынша барлық $t \in [0, T]$ үшін $x^*(t) = x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ орындалады. $x(\Delta_N, t, \lambda^*)$

функциясының сәйкес өрнектерін (2.2.2) және (2.2.3) теңдеулерге қоя отырып,

$$g[\lambda_1^*, \lambda_N^* + v_N(T, \lambda^*)] = 0,$$

$$\lambda_p^* + v_p(t_p, \lambda^*) - \lambda_{p+1}^* = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

теңдіктерін аламыз, яғни $\lambda^* \in R^{nN}$ (2.2.5) теңдеуінің шешімі.

Енді $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ векторы (2.2.4) теңдеудің шешімі ұйғарамыз. Онда (1.2.1), (1.2.2) арнайы Коши есебінің $v[t, \tilde{\lambda}] \in S(0, \rho_v)$ жалғыз шешімі болады. $\tilde{\lambda}$ және $v[t, \tilde{\lambda}]$ функциялар жүйесін Δ_N жалпы шешімге қойсақ, $x(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda})$ аламыз. А шартынан $(t, \tilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ шығады. $Q_*(\Delta_N; \tilde{\lambda}) = 0$ болғандықтан,

$$g[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_N + v_N(T, \tilde{\lambda})] = 0,$$

$$\tilde{\lambda}_p + v_p(t_p, \tilde{\lambda}) - \tilde{\lambda}_{p+1} = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

болады және 2.1.1 - анықтама бойынша

$$\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}_r + v_r(t, \tilde{\lambda}), \ \ t \in [t_{r-1}, t_r), \ \ r = \overline{1, N-1},$$

$$\tilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}_N + v_N(t, \tilde{\lambda}), \ \ t \in [t_{N-1}, t_N),$$

теңдіктері орындалады, $\tilde{x}(t)$ функциясы (2.2.1) шекаралық шартын және (2.2.2) үзіліссіздік шарттарын қанағаттандырады. Демек, 1.1.1 - теорема бойынша $\tilde{x}(t)$ функциясы (1.1.1) теңдеуді де қанағаттандырады, яғни $\tilde{x}(t)$ функциясы (1.1.1), (2.2.1) есептің шешімі болады. 2.2.1 - теорема дәлелденді.

2.3 Квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Δ_N жалпы шешімді құру

Квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, x(\tau)\big)d\tau, t \in [0,T], x \in R^n, \qquad (2.3.1)$$

мұндағы $\varepsilon > 0, A(t), \varphi_k(t), \psi_k(\tau) - n \times n$ – матрицалары және , $f_0(t)$ - n векторы $[0,T]$ аралығында үзіліссіз, $f_k: [0,T] \times R^n \to R^n, k = \overline{1,m}$ үзіліссіз, $\|x\| = \max_{i=1,n} |x_i|$.

Сызықтық теңдеудің ұқсас шешімін негізге ала отырып, (2.3.1) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімін құру және табылған шешімді шеттік есепке қолдану.

$C([0,T], R^{nN})$ кеңістігі арқылы барлық $x: [0,T] \to R^n$ үзіліссіз функциясын белгілейміз, нормасы $\|x\|_1 = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$ болады.

(2.3.1) теңдеуді шешу арқылы $[0,T]$ аралығында үздіксіз дифференциалданатын және теңдеуді қанағаттандыратын $x(t) \in C([0,T], R^n)$ функциясын түсінеміз. Интервалдардың ақырлы нүктелерінде функциялардың бір жақты туындылары бар деп есептейміз.

$[0,T]$ аралығын $t_0 = 0 < t_1 <\ldots< t_N = T$ нүктелеріне Δ_N бөліктеуімен белгілейік.

$\mathbb{C}([0,T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ кеңістігімен барлық $x[t] = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\big)$ функцияларын белгілейік, мұндағы $x_r(t): [t_{r-1}, t_r) \to R^n, r = \overline{1,N}$ функциясы үзіліссіз және $\lim_{t \to t_r - 0} x_r(t)$ сол жақты ақырлы шектері бар, нормасы $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$.

Алдымен, (2.3.1) теңдеуге $\varepsilon = 0$ қойып,

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau)y(\tau)d\tau + +A(t)y + f_0(t), t \in [0,T], y \in R^n \quad (2.3.2)$$

сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз

(2.3.2) теңдеуіне Д.С.Джумабаев параметрлеу әдісін [69,p.345] қолдану арқылы Δ_N бөліктеуі үшін сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі арнайы Коши есебін аламыз

$$\frac{dv_r}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(\tau)\big[v_j(\tau) + \lambda_j\big] d\tau$$

$$+A(t)[v_r + \lambda_r] + f_0(t), t\epsilon[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \tag{2.3.3}$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0,\ r = \overline{1, N}. \tag{2.3.4}$$

$\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ бекітілген параметр үшін (2.3.3), (2.3.4) есебінің шешімі $v_r(t, \lambda^*)$, $r = \overline{1, N}$ компоненттері анықталу облыстарында t айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданатын және $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r = \overline{1, N}$ үшін (2.3.3) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі мен (2.3.4) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $v[t, \lambda^*] = \big(v_1(t, \lambda^*), v_2(t, \lambda^*), \dots, v_n(t, \lambda^*)\big) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ функциялар жүйесі болады.

Элементтері

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau)\, X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau_1)\, \varphi_k(\tau_1) d\tau_1 d\tau, p, k = \overline{1, m},$$

болатын $nm \times nm$ өлшемді $G(\Delta_N) = G_{p,k}(\Delta_N)$ матрицасын құрамыз, мұндағы $X_r(\tau)$ $[t_{r-1}, t_r]$ аралығындағы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ дифференциалдық теңдеуінің фундаментальді матрицасы.

$I - G(\Delta_N)$ матрицасының кері матрицасы бар және келесі түрде болады:

$$[I - G(\Delta_N)]^{-1} = \Big(R_{k,p}(\Delta_N)\Big), \qquad k, p = \overline{1, m},$$

мұндағы I- nm өлшемді бірлік матрица, $R_{k,p}(\Delta_N)$ - n өлшемді квадраттық матрица.

$[I - G(\Delta_N)]^{-1}$ матрицасының бар болуы кез келген $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN}$ және $f_0(t) \in \mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ үшін (2.3.3), (2.3.4) арнайы Коши есебінің жалғыз шешімі $v[t, \lambda^*] = \big(v_1(t, \lambda^*), v_2(t, \lambda^*), \dots, v_n(t, \lambda^*)\big) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$ функциялар жүйесінің бар болуын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар, келесі теңсіздік орынды болады:

$$\|v[\cdot,\lambda]\|_2 \le \chi\|F_0[\cdot,\lambda]\|_2,$$

мұндағы χ тұрақтысы $\lambda \in \mathbb{R}^{nN}$ векторы мен $f_0(t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ функциясынан тәуелсіз және

$$F_0[t,\lambda] = \Big(F_{0,1}(t,\lambda), F_{0,2}(t,\lambda), \dots, F_{0,N}(t,\lambda)\Big) \in \mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})$$

мұндағы

$$F_{0,r}(t,\lambda) = A(t)\lambda_r + \sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau)d\tau\,\lambda_j +$$

$$+f_0(t), t \in [t_{r-1},t_r), r = \overline{1,N}.$$

χ саны (2.3.3), (2.3.4) арнайы Коши есебінің қисынды шешілімділік тұрақтысы деп аталады. $[I - G(\Delta_N)]^{-1}$ бар болатындықтан, [75, 86 б.] алынған нәтижелерге бойынша (2.3.2) теңдеуінің $y(\Delta_N,t,\lambda)$ жалғыз Δ_N жалпы шешімі бар болады және

$$y(\Delta_N,t,\lambda) = \lambda_r + \sum_{j=1}^{N} d_{r,j}(\Delta_N,t)\,\lambda_j + b_r(\Delta_N,t), t \in [t_{r-1},t_r), r = \overline{1,N},$$

$$y(\Delta_N,T,\lambda) = \lambda_N + \sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N,T)\,\lambda_j + b_N(\Delta_N,T),$$

мұндағы

$$d_{r,j}(\Delta_N,t) = X_r(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\left[\sum_{p=1}^{m} R_{k,p}(\Delta_N)\,V_{p,j}(\Delta_N) +\right.$$

$$\left. + \int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau, \qquad t \in [t_{r-1},t_r), \qquad j \ne r,$$

$$d_{r,r}(\Delta_N,t)=X_r(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)\left\{\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\left[\sum_{p=1}^{m}R_{k,p}(\Delta_N)\,V_{p,r}(\Delta_N)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_k(\tau_1)d\tau_1\right]+A(\tau)\right\}d\tau,$$

$$b_r(\Delta_N,t)=X_r(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)\left[\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{p=1}^{m}R_{k,p}(\Delta_N)\,g_p(\Delta_N,f_0)+f_0(\tau)\right]d\tau,$$

$$V_{p,r}(\Delta_N)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)\,X_r(t)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(\tau_1)\,A(\tau_1)d\tau_1d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_p(\tau)\,X_r(t)\int_{t_{j-1}}^{\tau}X_r^{-1}(\tau_1)\,\varphi_k(\tau_1)d\tau_1d\tau\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_k(\tau_2)d\tau_2,$$

$$g_p(\Delta_N,f)=\sum_{r=1}^{m}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)\,X_r(t)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(\tau_1)\,f(\tau_1)d\tau_1d\tau, r,j=\overline{1,N}, p=\overline{1,m}.$$

$\lambda^{(0)}=\left(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_N^{(0)}\right)\in R^{nN}$ векторы мен $\rho_\lambda>0,\ \rho>\rho_\lambda,\ \ \rho_u=\rho-\rho_\lambda$ сандары берілсін, $[0,T]$ кесіндісінде бөлікті-үзіліссіз $y^{(0)}(t)=y\big(\Delta_N,t,\lambda^{(0)}\big)$ функциясын, элементтері $v_r^{(0)}(t)=y^{(0)}(t)-\lambda_r^{(0)},\ t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$ болатын $v^{(0)}[t]=\left(v_1^{(0)}(t),v_2^{(0)}(t),\dots,v_N^{(0)}(t)\right)$ функциялар жүйесін таңдаймыз және келесі жиындарды құрамыз:

$$G^0(\rho)=\left\{(t,x)\colon t\in[0,T],\left\|x-y^{(0)}(t)\right\|<\rho\right\},$$

$$S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)=\left\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in R^{nN}\colon\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\rho_\lambda,\ \ r=\overline{1,N}\right\},$$

$$S\big(v^{(0)}[t],\rho_v\big)=\left\{u[t]\in\mathbb{C}([0,T],\Delta_N,\mathbb{R}^{nN})\colon\left\|u[\cdot]-v^{(0)}[\cdot]\right\|_2<\rho_v\right\},$$

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t, x): t \in \left[t_{p-1}, t_p\right), \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\}, p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \left\{(t, x): t \in [t_{N-1}, t_N), \left\|x - y^{(0)}(t)\right\| < \rho\right\},$$

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

(2.3.1) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімін құру үшін Д.С.Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз.

Егер де $x(t)$ функциясы (2.3.1) теңдеуін қанағаттандырса және $\big(t, x(t)\big) \in G^0(\Delta_N, \rho)$, онда $x(t)$ функциясының $[t_{r-1}, t_r)$ аралығындағы тарылымдары болатын $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ функциялары келесі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)x_j(\tau)d\tau + f_0(t)$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\left(\tau, x_j(\tau)\right) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r) \qquad (2.3.5)$$

қанағаттандырады және $\big(t, x_r(t)\big) \in G_r^0(\rho), r = \overline{1, N}$ болады, мұнда $r = \overline{1, N}$.

$\lambda_r \triangleq x_r(t_{r-1})$ параметрлерін енгізе отырып, (2.3.5) жүйесінде әрбір r-ші аралықта $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ алмастыруларын жасай отырып, келесі параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)\big(u_j(\tau) + \lambda_j\big)d\tau + f_0(t) +$$

$$+\varepsilon \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j\big)d\tau\, , t \in [t_{r-1}, t_r) \qquad (2.3.6)$$

және

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \;\; r = \overline{1, N} \tag{2.3.7}$$

бастапқы шарттарын аламыз.

(2.3.6), (2.3.7) есебін сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі арнайы Коши есебі деп атаймыз.

(2.3.6), (2.3.7) есебін операторлық теңдеу түрінде жазамыз және оны шешуде итерациялық процесті қолданамыз. Сызықтық $H: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ операторын енгізейік:

$$\mathbb{X} = \left\{u[t] = \left(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\right) \in \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN}) : u_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N}\right\},$$

$$\mathbb{Y} = \mathbb{C}([0, T], \Delta_N, \mathbb{R}^{nN})$$

кеңістіктерін және

$$Hu[t] = \left(w_1^{(1)}(t), w_2^{(1)}(t), \dots, w_N^{(1)}(t)\right),$$

сызықтық операторын енгіземіз, мұндағы

$$w_r^{(1)}(t) = \dot{u}_r(t) - A(t)u_r - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) u_j(\tau) d\tau,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}.$$

H операторының анықталу облысы

$$D(H) = \left\{u[t] = \left(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\right) \in X \right.,$$

мұндағы $u_r(t)$ компоненттері $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ аралығында үзіліссіз дифференциалданады. H - тұйық, шенелмеген сызықтық оператор.

Ендігі кезекте (2.3.6), (2.3.7) арнайы Коши есебін

$$Hu[t] = \varepsilon F(u[t], \lambda) + F_0[t, \lambda], \tag{2.3.8}$$

сызықтық емес операторлық теңдеу түрінде жазамыз, мұндағы

$$F(u[t],\lambda) = \left(w_1^{(2)}(t), w_2^{(2)}(t), \dots, w_N^{(2)}(t)\right),$$

$$w_r^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau,\ t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}.$$

$L(Y,X)$ - индукцияланған нормасы бар $\Lambda: Y \to X$ сызықтық тұйық операторларының кеңістігі болсын. (2.3.6), (2.3.7) арнайы Коши есебі χ тұрақтысымен қисынды шешілімді деп ұйғарғанымыз бойынша $H: X \to Y$ операторының кері операторы бар және $\|H^{-1}\|_{L(Y,X)} \le \chi$ бағалау орынды болады.

2.3.1 - теорема. *(2.3.6), (2.3.7) арнайы Коши есебі χ тұрақтысымен қисынды-шешілімді болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын:*

(i) $\|f_k(t,x') - f_k(t,x'')\| \le L_k\|x' - x''\|, L_k, k = \overline{1,m}$ – *тұрақтылар,* $(t,x'), (t,x'') \in G^0(\rho)$*;*

(ii) $q_\varepsilon = \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k L_k < 1, \qquad \max_{t\in[0,T]} \|\varphi_k(t)\| \int_0^T \|\psi_k(\tau)\| d\tau \le M_k,\ \ k = \overline{1,m}$;

(iii) *барлық* $\lambda \in \left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін*

$$\frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|f_k(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\| < \rho_u.$$

Онда әрбір $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ *үшін (2.3.6), (2.3.7) арнайы Коши есебінің* $S\left(v^{(0)}, \rho_u\right)$ *шарына тиісті болатын жалғыз шешімі* $u[t,\lambda,\varepsilon] = \left(u_1(t,\lambda,\varepsilon), u_2(t,\lambda,\varepsilon), \dots, u_N(t,\lambda,\varepsilon)\right)$ *функциялар жүйесі бар болады және келесі теңсіздік орындалады*

$$\|u[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v\|_2 \le \frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|f_k(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|. \quad (2.3.9)$$

Дәлелдеу. H операторының шенелген кері операторы бар болғандықтан, (2.3.8) теңдеу

$$u[t] = \varepsilon H^{-1}F(u[t],\lambda) + H^{-1}F_0[t,\lambda] \qquad (2.3.10)$$

операторлық теңдеуіне эквивалентті.

Кез келген бекітілген $\lambda \in S\big(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\big)$ үшін (2.3.10) теңдеудің шешімін

$$u^{(0)}[t,\lambda,\varepsilon] = v[t,\lambda],$$

$$u^{(\nu+1)}[t,\lambda,\varepsilon] = \varepsilon H^{-1}F\big(u^{(\nu)}[t,\lambda,\varepsilon],\lambda\big) + H^{-1}F_0[t,\lambda], \nu = 0,1,2,\dots. \quad (2.3.11)$$

итерациялық процесс арқылы табамыз.

Теорема ұйғарымдарын қолдана отырып, келесі теңсіздіктерді аламыз:

$$\|u[\cdot,\lambda,\varepsilon] - v\|_2 = \varepsilon\|H^{-1}F(v[\cdot,\lambda],\lambda)\|_2$$

$$\leq \varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r]} \left\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k\big(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau \right\|$$

$$\leq \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{j=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]} \big\|f_k\big(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j\big) d\tau\big\|, \qquad (2.3.12)$$

$$\big\|u^{(\nu+1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon] - u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\big\|_2$$

$$\leq \varepsilon\|H^{-1}\|_{L(Y,X)} \big\|F\big(u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\big) - F\big(u^{(\nu-1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\big)\big\|_2$$

$$\leq \varepsilon\chi \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r]} \Bigg\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) \Big(f_k\Big(\tau, u_j^{(\nu)}(\tau,\lambda,\varepsilon) + \lambda_j\Big) - f_k\Big(\tau, u_j^{(\nu-1)}(\tau,\lambda,\varepsilon) + \lambda_j\Big)\Big) d\tau \Bigg\|$$

$$\leq \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k L_k \big\|u^{(\nu)}[\cdot,\lambda,\varepsilon] - u^{(\nu-1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]\big\|_2, \nu = 1,2,\dots, \qquad (2.3.13)$$

$$\left\|u^{(\nu+1)}[\cdot,\lambda,\varepsilon]-v^{(\nu)}[\cdot,\lambda]\right\|_2$$

$$<\frac{1}{1-q_\varepsilon}\varepsilon\chi\sum_{k=1}^{m}M_k\max_{r=\overline{1,N}}\max_{t\in[t_{r-1},t_r]}\|f_k(t,v_r(t,\lambda)+\lambda_r)\|. \quad (2.3.14)$$

(2.3.12)-(2.3.14) теңсіздіктері және 2.3.1 - теореманың (iii) шарты (2.3.11) итерациялық процестің (2.3.8) теңдеуінің $S(v[t,\lambda],\rho_u)$ шарындағы жалғыз шешімі болатын $u[t,\lambda,\varepsilon]$ функциялар жүйесіне жинақталатынын және (2.3.9) бағалауының орындалатынын қамтамасыз етеді. Теорема дәлелденді.

Келесі анықтаманы енгізейік.

2.3.1 - анықтама.

$$u[t,\lambda,\varepsilon]=\big(u_1(t,\lambda,\varepsilon),u_2(t,\lambda,\varepsilon),\dots,u_N(t,\lambda,\varepsilon)\big)\in S(v[t,\lambda],\rho_u)$$

функциялар жүйесі $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\in S\big(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\big)$ *параметрлері бар (2.3.6), (2.3.7) арнайы Коши есебінің жалғыз шешімі болсын. Онда*

$$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=\lambda_r+u_r(t,\lambda,\varepsilon), t\in[t_{r-1},t_r), r=\overline{1,N}$$

және

$$x(\Delta_N,T,\lambda,\varepsilon)=\lambda_N+\lim_{t\to T-0}u_N(t,\lambda,\varepsilon)$$

теңдіктерімен анықталған $x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ *функциясы (2.3.1) теңдеуінің* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *жиынындағы* Δ_N *жалпы шешімі деп аталады.*

2.3.1 - анықтама мен 2.3.1- теоремадан келесі тұжырым туындайды.

2.3.2 - теорема. *2.3.1 - теорема шарттары орындалса, онда (2.3.1) теңдеуінің* $G^0(\Delta_N,\rho)$ *жиынында жалғыз* Δ_N *жалпы шешімі болатын* $x(\Delta_N,T,\lambda,\varepsilon)$ *функциясы бар болады және оны келесі түрде жазуға болады*

$$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=y(\Delta_N,t,\lambda)+\Delta x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon),$$

мұндағы $x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)$ *функциясы*

$$x(\Delta_N,t,\lambda,\varepsilon)=u_r(t,\lambda,\varepsilon)-v_r(t,\lambda),$$

$$\Delta x(\Delta_N,T,\lambda,\varepsilon)=\lim_{t\to T-0}u_N(t,\lambda,\varepsilon)-\lim_{t\to T-0}v_N(t,\lambda)\, t\in[t_{r-1},t_r), r=\overline{1,N}$$

теңдіктерімен анықталады.

Сонымен қатар, келесі бағалау орынды болады

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)\| \le \frac{1}{1-q_\varepsilon} \varepsilon\chi \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t\in[t_{r-1},t_r]} \|f_k(t, v_r(t,\lambda) + \lambda_r)\|.$$

2.4 Квазисызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімі

Квазисызықтық Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін келесі шеттік есепті қарастырамыз:

$$Bx(0) + Cx(T) = d, d \in R^n\,, \qquad (2.4.1)$$

мұндағы $B, C\; -\; n \times n$ – тұрақты матрицалар.

(2.3.1) теңдеуі үшін (2.4.1) шекаралық шарты бар шеттік есепті зерттеуге және шешуге Δ_N жалпы шешімді қолданамыз.

(2.3.2) теңдеуінің Δ_N жалпы шешімін (2.4.1) шекаралық шарты мен бөліктеудің ішкі нүктелеріндегі үзіліссіздік шарттарына қойып, параметрлерге қатысты

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N, T)\,\lambda_j = d - Cb_N(\Delta_N, T), \qquad (2.4.2)$$

$$\lambda_p + \sum_{j=1}^{N} d_{p,j}(\Delta_N, t_p)\,\lambda_j - \lambda_{p+1} = -b_p(\Delta_N, t_p), p = \overline{1, N-1}, \qquad (2.4.3)$$

сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

(2.4.2), (2.4.3) теңдеулерін

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N)$$

түрде жазамыз.

[69, 345 бб.]-дағы 2.2 - теоремаға сәйкес $Q_*(\Delta_N): R^{nN} \to R^{nN}$ матрицасының кері матрицасының бар болуы (2.3.2), (2.4.1) сызықтық шеттік есебінің бірмәнді шешімділігіне эвиваленттi болады.

Енді (2.3.1), (2.1.4) квазисызықтық шеттік есебін зерттейміз. Егер $x(t)$ функциясы (2.3.1) теңдеуінің шешімі болса, онда оның тарылымдарының функциялар жүйесі келесі теңдіктерді қанағаттандырады:

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), p = \overline{1, N-1}. \tag{2.4.4}$$

(2.4.4) теңдіктері - Δ_N бөліктеуінің ішкі нүктелеріндегі (2.3.1) теңдеуінің шешімдері үшін үзіліссіздік шарттары.

$x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ (2.3.1) теңдеуінің $G^0(\Delta_N, \rho)$ жиынындағы Δ_N жалпы шешімі болсын. (2.4.1) шекаралық шартына және (2.4.4) үзіліссіздік шарттарына $x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon)$ шешімінің сәйкес өрнектерін қойып,

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\sum_{j=1}^{N} d_{N,j}(\Delta_N, T)\,\lambda_j + C\Delta x(\Delta_N, \mathrm{T}, \lambda, \varepsilon) = d - Cb_N(\Delta_N, T), \tag{2.4.5}$$

$$\lambda_p + \sum_{j=1}^{N} d_{p,j}(\Delta_N, t_p)\,\lambda_j - \lambda_{p+1} + \Delta x(\Delta_N, t, \lambda, \varepsilon) =$$

$$= -b_p(\Delta_N, t_p), \quad p = \overline{1, N-1} \tag{2.4.6}$$

сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

(2.4.5), (2.4.6) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N) - Q_*(\Delta_N, \lambda, \varepsilon), \tag{2.4.7}$$

мұндағы

$$Q_*(\Delta_N, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} C\Delta x(\Delta_N, T, \lambda, \varepsilon) \\ \Delta x(\Delta_N, t_p, \lambda, \varepsilon) \\ \dots \\ \Delta x(\Delta_N, t_{N-1}, \lambda, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

[75, 31 б.] жұмыстағы 3.2 - теоремада дәлелленгендей (2.1.1), (2.4.1) есептің шешілімділігі (2.4.7) сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімділігіне эквивалентті болады. (2.4.7) жүйесінің шешімділік шарттары келесі тұжырымдамада орнатылады.

2.4.1 - теорема 2.3.1 - теореманың шарттары және келесі ұйғарымдар орындалсын:

(i) $Q_*(\Delta_N)$ матрицасының кері матрицасы бар және $\|[Q_*(\Delta_N)]^{-1}\| \le \gamma$;

$$(ii) \quad \sigma_\varepsilon = \gamma \cdot max(1, \|C\|) q_\varepsilon \left(\frac{\chi}{1 - q_\varepsilon} \left(\alpha + \widetilde{K}_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} M_k L_k \right) + 1 \right) < 1,$$

мұндағы

$$\alpha = \max_{t \in [0,T]} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{N} \|a_{ij}(t)\|,$$

$$\widetilde{K}_0 = \sum_{k=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} \|\varphi_k(t)\| \int_0^T \|\psi_k(\tau)\| d\tau;$$

$$(iii) \qquad \frac{1}{1 - \sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon \chi}{1 - q_\varepsilon} \gamma max(1, \|C\|)$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|f_k(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\| < \rho_\lambda.$$

Онда (2.4.7) сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесі $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *жалғыз шешімге ие болады.*

Дәлелдеу. (2.4.7) теңдеудің шешімі итерациялық процесс арқылы шешіледі:

$$\lambda^{(0)} = -[Q_*(\Delta_N)]^{-1} \cdot F_*(\Delta_N),$$

$$\lambda^{(\nu+1)} = -[Q_*(\Delta_N)]^{-1} \cdot \left\{ F_*(\Delta_N) + \Delta Q_*\left(\Delta_N, \lambda^{(\nu)}, \varepsilon\right) \right\}. \qquad (2.4.8)$$

Теореманың шарттарына сәйкес келесі теңсіздіктер орындалады:

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma \cdot \left\|\Delta Q_*\left(\Delta_N, \lambda^{(0)}, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\leq \gamma \cdot \, max\,(1, \|C\|) \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \Delta x\left(\Delta_N, t_r, \lambda^{(0)}, \varepsilon\right) \right\| \leq$$

$$\leq \gamma \cdot \, max\,(1, \|C\|) \frac{\varepsilon \chi}{1 - q_\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \left\| f_k\left(t, v_r\left(t, \lambda^{(0)}\right) + \lambda_r^{(0)}\right) \right\|,$$

$$\left\| \lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)} \right\| \leq$$

$$\leq \gamma \cdot \, max\,(1, \|C\|) q_\varepsilon \left\{ \frac{\chi}{1 - q_\varepsilon} \left(\alpha + \widetilde{K}_0 + \varepsilon L\right) + 1 \right\} \left\| \lambda^{(\nu)} - \lambda^{(\nu-1)} \right\|, \nu = 1,2, \ldots,$$

$$\left\| \lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(0)} \right\| \leq \frac{1}{1 - \sigma_\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{\varepsilon \chi}{1 - q_\varepsilon} \gamma \, max\,(1, \|C\|) \sum_{k=1}^{m} M_k \max_{r=\overline{1,N}} \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|f_k(t, v_r(t, \lambda) + \lambda_r)\|.$$

2.3.1 - теоремасының дәлелдеуі сияқты, (2.4.8) итерациялық процесс (2.4.7) теңдеудің жалғыз шешімі болатын $\lambda \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right)$ векторына жинақталады.

2.3.1 - теорема мен [75, 31 б.] жұмыстағы 3.2 теоремадан келесі тұжырымды аламыз:

2.4.2 - теорема. *2.3.2 - теореманың шарттары орындалсын делік. Онда квазисызықтық (2.3.1), (2.4.1) шеттік есебінің* $\left(t, x^*(t)\right) \in G^0(\Delta_N, \rho)$ *болатындай* $x^*(t)$ *жалғыз шешімі болады.*

Жаңа жалпы шешімді қолдана отырып, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін квазисызықтық шеттік есептің жалғыз шешімінің жеткілікті шарттары орнатылды.

3. СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ОРТАЛАУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Бұл бөлімде Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(t, s, x(s)\big)\, ds\right) \tag{3.1}$$

және

$$x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

Коши шартын және

$$F\left(x(0), x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{3.3}$$

шеттік шарттарын қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon > 0$ параметрі аз шама, d-өлшемді X және F вектор функциялар, m - өлшемді φ вектор функция, $T > 0$ бекітілген сан. $X_0(x)$ интегралдық орташа мәнін анықтаймыз

$$X_0(x) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_0^A X\big(t, x, \varphi_1(t, x)\big) dt, \tag{3.4}$$

мұндағы

$$\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(\, t, s, x) ds,$$

(3.1)-(3.3) есептерін орталау есептеріне сәйкес келтіреміз

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y), \tag{3.5}$$

$$y(0) = x_0, \tag{3.6}$$

$$F\left(y(0), y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \tag{3.7}$$

немесе, $\tau = \varepsilon t$ баяу уақыт шкаласында,

$$\frac{dy}{dt} = X_0(y), F\big(y(0), y(T)\big) = 0 \tag{3.8}$$

аламыз.

Негізгі нәтижелер Коши есебі үшін орталау әдісін негіздеу және егер (3.5)-(3.7) есебінің шешімі бар болса, онда ε параметрінің аз мәндерінде (3.4) шеттік есептің (3.5)-(3.7) есептің шешімінің кіші маңайындағы шешімі бар болатынын тұжырымдау.

Орталау әдісі арқылы әртүрлі зерттеуде, мысалы, тиімді басқару [119],[120], оң жағы көп мәнді жүйелер [121] және басқа есептерде де кеңінен қолданылады.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жаратылыстану ғылымдарындағы әртүрлі процестердің математикалық моделдері ретінде пайда болады. Атап айтсақ, популяция динамикасында [122], химиялық кинетикада, гидродинамикада [13, 123, 124], эпидемиологияда [125]. Моделдеу объектілерінің қоршаған ортамен өзара әрекеттесуі қоршаған орта интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеткі есептердің пайда болуына әкеледі. Бұл мәселелерді көптеген авторлар өз еңбектерінде зерттеген [74-78, 98, 455-456 бб.; 123, 316-318 бб.;126].

Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне арналған шеттік есептер орталау әдісімен зерттеледі. ε аз шама үшін (3.5) орталау жүйесінің шеттік есебінің шешімі болуы (3.1) бастапқы шеттік есебінің шешімінің бар болуын білдіреді. Сәйкес шешімдер арасындағы жақындық білінеді. [127] жұмыстың нәтижесі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне арналған шеттік есептерге қатысты [128] классикалық нәтижені жалпылау болып табылады.

Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептерді шешудің орталау әдісі [129], [130] қарастырылған. Алайда, бұл жұмыстарда нақты және орташа есептерді шешудің арасындағы жақындықты бағалау ғана белгіленді. Шешімнің болу фактісі бекітілген.

Бұл жұмыс идеяларды одан әрі дамытуға бағытталған [131] Фредгольм теңдеулерінің шеттік есептерін зерттеуге қатысты болып табылады. Фредгольм теңдеулері үшін Боголюбовтың бірінші теоремасының аналогтары Вольтера теңдеулерінің аналогтарынан айырмашылығы оң жақ бөлігі жәй мүшесі мен интегралдық бөліктің қосындысы болып табылатын және соңғы интегралдау интервалында орындалатын ерекше жағдайда ғана алынды [131, 295б.].

Мұнда R^d $|\cdot|$ арқылы вектор нормасын белгілейміз және $\|\cdot\|$ матрицалық норма векторлық нормаға сәйкес келеді.

3.1 Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Коши есебі

Бұл бөлімде (3.1), (3.2) есебін шешілмділікке зерттейміз. Келесі теорема орталау әдісіне негізделеді.

Келесі теорема орынды.

3.1.1 - теорема. *Келесі шарттар орындалсын:*

(1.1) $X(t,x,y)$ *функциясы* $Q=\{t\geq 0, x\in R^d, y\in R^m\}$ *жиынында анықталған және үзіліссіз, осы облыста* M *тұрақтысымен шенелген,* x *және* y *айнымалыларына қатысты келесі Липщиц шартын қанағаттандырады*

$$|X(t,x,y)-X(t,x_1,y_1)|\leq \alpha(t)(|x-x_1|+|y-y_1|), \qquad (3.1.1)$$

мұндағы $\alpha(t)\geq 0$.

(1.2) $\varphi(t,s,z)$ *функциясы* $Q_1=\{t\geq 0,\ s\geq 0,\ z\in R^d\}$ *облысында анықталған және үзіліссіз,* $M>0$ *тұрақтысымен шенелген және Липшиц шартын қанағаттандырады*

$$|\varphi(t,s,z)-\phi(t,s,z_1)|\leq \mu(t,s)|z-z_1|, \qquad (3.1.2)$$

мұндағы $\mu(t,s)\geq 0$. *Сонымен қатар,*

$$\mu(t,s)\leq \mu_0, \qquad \int_0^\infty \mu(t,s)ds\leq \mu_0,$$

орындалатындай $\mu_0>0$ *тұрақтысы бар және*

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \mu(t,s)ds\to 0, t\to\infty; \qquad (3.1.3)$$

сондай-ақ, барлық $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ *үшін*

$$\varepsilon\left(\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \alpha(s)\, ds + \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \alpha(s)\left(\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \mu(\tau, s) d\tau\right) ds\right) < 1; \qquad (3.1.4)$$

орындалатындай $\bar{\varepsilon} > 0$ *бар;*

(1.3) (3.4) және

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_\tau^\infty |\varphi(\tau, s, x|\, ds\right) d\tau = 0 \qquad (3.1.5)$$

шектері $x \in D$ *(*D *облысы* R^d *тиісті) қатысты бірқалыпты;*
(1.4) (3.5) *орталау жүйесінің* $\tau \in [0, T]$ *үшін* D *облысына тиісті кейбір* ρ*-аймағында* $y(\tau) = y(\varepsilon\tau)$ *шешімі бар.*
Онда, әрбір $\eta > 0$ *үшін (1) жүйеге қойылған* $x(0) = y(0) = x_0$ *Коши есебінің* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *үшін* $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ *кесіндісінде анықталатын* $x(t, \varepsilon)$ *жалғыз шешімі бар болатындай және*

$$|y(\varepsilon t) - x(t, \varepsilon)| \leq \eta, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]. \qquad (3.1.6)$$

теңсіздік орындалатындай $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) \leq \bar{\varepsilon}$ *бар болады.*

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін келесі Коши есебін қарастырамыз:

$$\dot{x} = X\left(t, x, \int_0^T \varphi\big(t, s, x(s)\big) ds\right), x(0) = x_0, \qquad (3.1.7)$$

мұндағы $[0, T]$ белгіленген интервал.
Келесі теорема орынды.
3.1.1 - теорема. *Келесі шарттар қанағаттандырсын делік:*
(1) $X(t, x, y)$ *функциясы*

$$Q = \{t \in [0, T], x \in R^d, \qquad y \in D\}$$

(D облысы R^m тиісті) облысында анықталған және

$$|X(t,x,y) - X(t,x_1,y_1)| \leq \alpha(t)(|x - x_1| + |y - y_1|), \qquad (3.1.8)$$

Липщиц шартын, сонымен қатар x, y қатысты сызықты өсу шартын қанағаттандырады; яғни $t \in [0,T], x \in R^d, y \in D$ үшін

$$|X(t,x,y)| \leq M(1 + |x| + |y|); \qquad (3.1.9)$$

орындалатындай $M > 0$ тұрақтысы бар;

(2) $\varphi(t,s,z)$ функциясы $Q_1 = \{t \in [0,T],\ s \in [0,T],\ z \in R^d\}$ облысында анықталған және үзіліссіз, Q_1 облысында M_1 тұрақтысымен шенелген және z-ке қатысты

$$|\varphi(t,s,z) - \varphi(t,s,z_1)| \leq \mu(t,s)|z - z_1| \qquad (3.1.10)$$

Липшиц шартын қанағаттандырады;

(3)

$$\int_0^T \alpha(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\left(\int_0^T \mu(t,s)\right)dt < 1 \qquad (3.1.11)$$

теңсіздігі орындалады;
(4) D облысы центрі координатаның бас нүктесінде орналасқан, радиусы TM_1 болатын $\bar{B}_{TM_1}(0)$ тұйық шарын қамтиды.

Онда барлық $x_0 \in R^d$ үшін (3.1.7) Коши есебінің x_0 бастапқы мәнінен үзіліссіз тәуелді болатын $[0,T]$ аралығында $x(t,x_0)$ $(x(0,x_0) = x_0)$ жалғыз шешімі бар болады.

Берілген (3.1), (3.2) есебі шешілімділікке зерттелді. Орталау әдісіне негізделген теоремалар келтірілді. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімдері қарастырылды.

(3.1)-(3.3) шеттік есебі үшін келесі тұжырымдама орынды болады.

3.1.1 – ескерту. (3.1.7) түрдегі жүйе әрекеті Вольтерра типтес жүйесінен айтарлықтай өзгеше.

[132] келесі теңдеуге мысал ретінде келесі есепті қарастырамыз

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Bx(s)ds + f(t), x \in R^2, t \in (0,2\pi), \qquad (3.1.12)$$

мұндағы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ матрицалары.

(3.1.12) жүйе келесі шарт орындалғанда шешімді болатындығын көрсетеді:

$$\int_0^{2\pi} \left(-f_1(t)sint + (1 - cost)\, f_2(t)\right)dt = 0$$

(3.1.12) теңдеу 3.1.2 - теоремасының шартын қанағаттандырмайтынын ескере кетейік.

Дәлелдеу. 3.1.2 - теоремасының дәлелі үш бөлімнен тұрады.

1. *Ерекшелігі.* $[0, T]$ аралығында Коши есебінің $x(t)$ және $y(t)$ екі шешімдері бар болсын, осылайша $\sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t) - y(t)| = \gamma > 0$. $x(t)$ және $y(t)$ теңдеулерді сәйкесінше

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x(\tau), \int_0^T \varphi\left(\tau, s, x(s)\right) ds\right) d\tau \qquad (3.1.13)$$

және

$$y(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, y(\tau), \int_0^T \varphi\left(\tau, s, y(s)\right) ds\right) d\tau \qquad (3.1.14)$$

қанағаттандыратынын ескеруіміз керек. Осылайша, (3.1.9) және (3.1.10) арқылы (3.1.11) қарама-қайшы болатын

$$|x(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \int_0^t \alpha(\tau)\,|x(\tau)-y(\tau)|d\tau + \int_0^t \alpha(\tau)\left(\int_0^T \mu(\tau,s)|x(s)-y(s)|\,ds\right)d\tau \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \int_0^T \alpha(\tau)\left(\int_0^T \mu(\tau,s)\,ds\right)d\tau\right)\lim_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|.$$

2. *Бар болу.* $\{x_n(t)\}$ функциялар жүйесін келесі жолмен құрастырамыз: $x_0(t) \equiv x_0$ және x_n келесі дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімі болады

$$\dot{x}_n = X\left(t, x_n, \int_0^T \varphi\big(t, s, x_{n-1}(s)\big)\,ds\right), \qquad x_n(0) = x_0.$$

Бұл тізбек корректілі анықталатынын көрсетелік. Шынымен де,

$$\dot{x}_1 = X\left(t, x_1, \int_0^T \varphi(t, s, x_0)\,ds\right), x_1(0) = x_0. \qquad (3.1.15)$$

$\varphi(t,s,x_0)$ функциясынан айнымалыларында үздіксіз болса, онда $g(t) = \int_0^T \varphi(t,s,x_0)ds$ t айнымалысына қатысты үздіксіз болады. Сонымен қатар, $\left|\int_0^T \varphi(t,s,x_0)ds\right| \leq M_1T$; демек, $\int_0^T \varphi(t,s,x_0)ds \in D$. Бұдан $Y(t,x) = X\big(t,x,g(t)\big)$ функциясы анықталатындығы шығады. $t \in [0,T]$, $x \in R^d$ қатысты үзіліссіз және $x \in R^d$ қатысты сызықтық өсу шартын қанағаттандырады.

Сонымен, (3.1.15) Коши есебі $[0,T]$ аралығында $x_1(t)$ жаһандық шешімі болады. Сол сияқты, $\{x_n(t)\}$ барлық тізбегі $[0,T]$ аралығында анықталатындығы көре аламыз.

$x_n(t)$ тізбегінің $[0,T]$ аралығында бірқалыпты жинақта болатындығын көрсетеміз.

Біз қарастырамыз

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int_0^T \varphi\big(\tau, s, x_{n-1}(s)\big)\, ds\right) d\tau, \qquad (3.1.16)$$

$$x_{n-1}(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x_{n-1}(\tau), \int_0^T \varphi\big(\tau, s, x_{n-2}(s)\big)\, ds\right) d\tau.$$

Осылайша

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \sup_{t\in[0,T]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| +$$

$$+ \int_0^T \alpha(\tau) \left(\int_0^T \mu(\tau, s)\, ds\right) d\tau \sup_{t\in[0,T]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)|$$

аламыз.

Онда

$$\sup_{t\in[0,T]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{\int_0^T \alpha(\tau) \left(\int_0^T \mu(\tau, s)\, ds\right) d\tau}{1 - \int_0^T \alpha(\tau) d\tau} \sup_{t\in[0,T]} |x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)| \qquad (3.1.17)$$

болады.

Бірақ (3.1.11)-ден келесі

$$\frac{\int_0^T \alpha(\tau) \left(\int_0^T \mu(\tau, s)\, ds\right) d\tau}{1 - \int_0^T \alpha(\tau) d\tau} = A < 1$$

шығады. Сонымен, (3.1.16) ескере отырып, $x_n(t)$ тізбегі $[0, T]$ бойынша $x^*(t)$ шекті функциясына бірқалыпты жинақты деп қорытынды жасауға болады. $n \to \infty$ ұмтылғанда, (3.1.8) пен (3.1.10)-нан

$$\int_0^t X\left(\tau, x_n(\tau), \int_0^T \varphi\big(\tau, s, x_{n-1}(s)\big)ds\right)d\tau$$
$$\to \int_0^t X\left(\tau, x^*(\tau), \int_0^T \varphi\big(\tau, s, x^*(s)\big)ds\right)d\tau$$

оңай ала аламыз. Осыдан $x^*(t)$ Коши есебінің (3.1.17) шешімі екендігі шфғады.

3. Бастапқы мәніндегі тұрақты тәуелділік. Үзіліссіз тәуелділік орындалмайды делік. Онда $\varepsilon > 0$ бар болсын, x_n тізбегінің бастапқы мәнінде $n \to \infty$ ұмтылғанда x_0 нүктесінде жинақты және $\{t_n\}$, $t_n \in (0, T]$ тізбегі келесідей болады

$$|x(t_n, x_n) - x(t_n, x_0)| = \varepsilon. \tag{3.1.18}$$

Мұндағы $x(t, x_n)$ функциясы $x(0, x_n) = 0$ бастапқы мәндерінде (3.1.7) жүйенің шешімі болады. $x(t, x_n)$ тізбегінің $C([0, T])$ кеңістігінде компактілі болатынын көрсетейік

$$|x(t, x_n)| \leq |x_n| + \int_0^t \mathrm{M}\big|1 + |x_n(\tau)|\big|\,d\tau + \int_0^t \big|\varphi\big(\tau, s, x_n(s)\big)ds\big|d\tau \leq$$

$$\leq |x_n| + MT + M\int_0^t |x_n(\tau)|d\tau + T^2MM_1.$$

Гронуолла леммасы бойынша, $\{x_n\}$ тізбегінің шеттік болуына байланысты

$$|x(t, x_n)| \leq (|x_n| + MT + T^2MM_1)e^{MT} \leq C \tag{3.1.19}$$

аламыз.

Әрі қарай, $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, T]$ үшін,

$$|x(t_2, x_n) - x(t_1, x_0)| \leq \int_{t_1}^{t_2} M(1 + C + TM_1), \tag{3.1.20}$$

$x(t, x_n)$ тізбегі тең үзіліс екендігі шығады. Демек, $x(t, x_n)$ $[0, T]$ аралығында бірқалыпты жинақталатын $\{x(t, x_{n_k})\}$ тізбегінен тұрады. Бұл реттілікті $\{t_{n_k}\}$ сандық тізбегі бір уақытта кейбір $t^* \in [0, T]$ жинақталатындай етіп таңдауға болатыны анық. Осылайша, $x(t, n_k) \rightrightarrows x^*(t)$, $n_k \to \infty$ және

$$x(t, n_k) = x_{n_k} + \int_0^t X\left(\tau, x_{n_k}(\tau), \int_0^T \varphi\left(\tau, s, x_{n_k}(s)\right) ds\right) d\tau. \quad (3.1.21)$$

(3.1.21) - де $n \to \infty$ ұмтылғанда,

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t X\left(\tau, x^*(\tau), \int_0^T \varphi\big(\tau, s, x^*(s)\big) ds\right) d\tau$$

аламыз. Сондай-ақ, $x^*(t)$ Коши есебінің (3.1.17) шешімі болып табылады. $x^*(t)$ функциясының $x(t, x_0)$-мен бірдей еместігін көрсетейік. Үзіліссіз $x(t, n_k)$-нің $x^*(t)$-ға біркелкі жинақты болатындығын ескерсек,

$$\left|x\left(t_{n_k}, x_{n_k}\right) - x^*(t^*)\right| \le \left|x\left(t_{n_k}, x_{n_k}\right) - x^*\left(t_{n_k}\right)\right| + \left|x^*\left(t_{n_k}\right) - x^*(t^*)\right|$$

теңсіздігінен $x\left(t_{n_k}, x_{n_k}\right) \to x^*(t^*), n_k \to \infty$ қорытындыға келеміз. Сондықтан, (3.1.18)-те шекті ауысуда $n_k \to \infty$ ұмтылғанда

$$|x^*(t^*) - x(t^*, x_0)| = \varepsilon \quad (3.1.22)$$

аламыз. $t^* \neq 0$ назар аударуымыз керек, себебі (3.1.18) үлкен n үшін орындалмайды. Осылайша, (3.1.22) Коши есебі шешімнің жалғыздығына қайшы келеді. Толық дәлел алынды.

3.1.1 - теоремасының (1.4) шарты орындалды делік. $K > 0$ бекітіп аламыз.

3.1.1 – анықтама. $a(t, \varepsilon)$ *функциясы* A_k *класына тиісті деп атаймыз, егер:*

(i) $\varepsilon > 0,\ t \ge 0,$ *үшін* $a(t, \varepsilon)$ *анықталады және* $(3.3 - 3.4)$ *орталау Коши есебінің шешімі болып табылатын* $y(\tau)$ *функциясы ρ-маңында мәндерді қабылдайды;*

(ii) $t \ge 0,\ s \ge 0$ *және* $\varepsilon > 0$ *үшін келесі теңсіздігі орындалады:*

$$|a(t, \varepsilon) - a(s, \varepsilon)| \le K\varepsilon|t - s|. \quad (3.1.23)$$

3.1.1 – лемма. *(3.1.4)-ші теңсіздікті ескермегенде, 3.1.1 - теоремасының шарттары орындалсын. Онда әрбір* $\eta > 0$ *үшін* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, K)$ *бар болады, сонымен қатар* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *үшін*

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(t, s, a(s, \varepsilon)\big) ds\right) \tag{3.1.24}$$

жүйесі $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ *анықталатын,* $x(0) = y(0) = x_0$, $x(t)$ *жүйенің шешімі болады.*

$$|y(\varepsilon t) - x(t)| \le \eta, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \tag{3.1.25}$$

теңсіздігі орындалады.

3.1.1 – ескерту. *Жоғарыдағы леммада келтірілгендей,* ε_0 *саны* x_0*-ге тәуелді емес және барлық* A_k *класына бірдей болып табылады.*

Дәлелдеу. 3.1.2 – теореманың дәлелдеуі сияқты барлық ε үшін Коши есебінің

$$\dot{x} = \varepsilon \mathrm{X}\left(t, x, \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(t, s, a(s, \varepsilon)\big) ds\right), x(0) = x_0 \tag{3.1.26}$$

$\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$- да анықталатын $x(t, \varepsilon)$ шешімі болатындығын көрсете аламыз.

$\eta > 0$ болады деп белгілейік. $x(t)$ мен $y(t)$ арасындағы айырмашылықты бағалайық (белгілеу ыңғайлы болуы үшін ε-ге тәуілділікті қалдырамыз).

$$|x(t) - y(t)| =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \left[X\left(\tau, x(\tau), \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi(\tau, s, a(s)\right) ds - X\left(\varepsilon, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, a(s, \varepsilon)\right) ds \right] d\tau =$$

$$+\varepsilon\int_0^t\left[X(\tau,x(\tau),\int_0^\tau \varphi(\tau,s,a(s))ds)\ -X_0(y(\tau))\right]d\tau =$$

$$=I_1(t)+\varepsilon\int_0^t X[(\tau,x(\tau),\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,a(s)\big)ds)$$

$$-X((\tau,y(\tau),\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,y(s)\big)ds)]\,d\tau +$$

$$+\varepsilon\int_0^\tau\left[X\left(\tau,y(\tau),\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,y(s)\big)ds\right)-X\left(\tau,y(\tau),\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,y(\tau)\big)ds\right)\right]d\tau +$$

$$+\varepsilon 0\tau\left[X\left(\tau,y(\tau),\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,y(\tau)\big)ds\right)-X_0\big(y(\tau)\big)\right]d\tau$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (3.1.27)$$

Енді (3.1.27)-тің әрбір мүшесін бөлек бағалайық. 3.1.1 - теоремасындағы (1.1) Липшиц шарты бойынша

$$|I_1(t)|\le \varepsilon\int_0^t L\left|\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(\tau,s,a(s)\big)ds-\int_0^\tau \varphi\big(\tau,s,a(s)\big)\,ds\right|d\tau \le$$

$$\le \varepsilon L\int_0^t\left(\int_\tau^{\frac{T}{\varepsilon}}\left|\varphi\big(\tau,s,a(s)\big)\right|ds\right)d\tau \qquad (3.1.28)$$

шығады.

$\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ кесіндісін ұзындықтары бірдей болатын n ішкі интервалдарға t_i нүктелеріне бөліп, $t_0=0<t_1<\cdots<t_n=\frac{T}{\varepsilon}$ нүктелері арқылы белгілейік. Онда

$$\varepsilon L \int_0^t \left(\int_\tau^{\frac{T}{\varepsilon}} \left|\varphi\big(\tau, s, a(s)\big)\right| ds \right) d\tau =$$

$$= \varepsilon L \left(\sum_i^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi\big(\tau, s, a(s)\big) - \varphi\big(\tau, s, a(t_i)\big)\right| ds \right.$$

$$\left. + \sum_i^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\varphi\big(\tau, s, a(s)\big) - \varphi\big(\tau, s, a(t_i)\big)\right| ds \right) d\tau$$

$$= I_{11}(t) + I_{12}(t). \tag{3.1.29}$$

мұнда әрбір $\varepsilon \in [0, t]$ үшін $[t_i, t_{i+1})$ аралығы $\left[\tau, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ интервалын қамтитын i индексі бойынша қосындысы орындалады.

Ендігі кезекте (3.1.29)-тің әрбір мүшесін жеке бағалайық. I_{11}-ді бағалау үшін (1.2) мен (3.1.23)-ды негізге аламыз

$$\left|\varphi\big(\tau, s, a(s)\big) - \varphi\big(\tau, s, a(t_i)\big)\right| \leq \mu_0 \varepsilon K |s - t_i| \leq$$

$$\leq \varepsilon \mu_0 \varepsilon K \frac{T}{\varepsilon n} = \mu_0 \frac{KT}{n}. \tag{3.1.30}$$

Онда

$$|I_{11}(t)| \leq \varepsilon L \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu_0 \frac{KT}{n} ds \right) d\tau \leq \varepsilon L \frac{T^2}{\varepsilon} \frac{\mu_0 K}{n} = \frac{\mu_0 K T^2 L}{n}. \tag{3.1.31}$$

$I_{11}(t)$ бағалауға көшелік. (3.1.5) арқылы, $t \to \infty$ ұмтылғанда, үздіксіз және монотонды түрде нөлге кемитін $\beta(t)$ функциясы бар екендігін ескереміз

$$\int_0^t \left(\int_\tau^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \left|\varphi\big(\tau, s, a(s_i)\big)\right| ds \right) d\tau \le t\beta(t). \qquad (3.1.32)$$

Егер t, біріншісінен басқа кез келген (t_i, t_{i+1}) аралығына тиісті болса, онда (3.1.32) теңсіздігінен келесі

$$|I_{12}(t)| \le \varepsilon L t\beta(t) \le LT\beta\left(\frac{T}{\varepsilon n}\right) \qquad (3.1.33)$$

шығады.

Бекітілген n үшін $\varepsilon \to 0$ ұмтылғанда (3.1.33) теңсіздігінің оң жағы нөлге жақындайды.

Егер $t \in [0, t_1]$ болса, онда (3.1.32) және Дини теоремасы арқылы

$$|I_{12}(t)| \le \varepsilon\beta(t) \le \sup_{\tau \in [0,T]} \tau\beta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \to 0, \varepsilon \to 0, \qquad (3.1.34)$$

аламыз.

(3.1.27) бағалауының $I_2(t)$ мүшесін бағалайық.

$$|I_2(t)| \le \varepsilon L \int_0^t |x(\tau) - y(\tau)| d\tau + \varepsilon L \int_0^t \left(\int_0^\tau \left|\varphi\big(\tau, s, a(s)\big) - \varphi\big(\tau, s, y(s)\big)\right| ds \right)$$

қарастырамыз. Бірақ, 3.1.1 - леммадағы шарттарға сәйкес, $y(\tau)$ функциясы ρ-аймағына тиісті $a(s, \varepsilon)$ функциясы орталау есебінің $[0, T]$ кесіндісімен шенелген шешімі болады. Сондықтан, барлық $\varepsilon > 0$, $s \ge 0$ үшін $a(s, \varepsilon)$ функциясы $R = R\big(\rho, y(\tau)\big)$ функциясына тәуелсіз болатын тұрақтымен шенеледі. Демек,

$$|I_2(t)| \le \varepsilon L \int_0^t \left(\int_0^\tau \mu(\tau, s)|a(s) - y(s)| ds \right) d\tau \le 2R\varepsilon \int_0^t \left(\int_0^\tau \mu(\tau, s) ds \right) d\tau$$

болады.

Алдыңғы жағдайға ұқсас, $t \to \infty$ ұмтылғанда нөлге жақындайтын (3.1.3)-ден $\beta_1(t)$ функциясы бар болып,

$$|I_2(t)| \leq 2R\varepsilon t\beta_1(t) \leq 2RT\beta_1(t) \qquad (3.1.35)$$

шығады.

Демек, таңдалған $\eta > 0$ үшін T_0 бар және $t \geq T_0$ үшін

$$|I_2(t)| \leq \frac{\eta}{4}. \qquad (3.1.36)$$

болады.

Әлбетте, $T_0 \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ деп болжэй аламыз. $t \in [0, T_0]$ үшін (3.1.36) бағалауды $\int_0^\infty \mu(t,s) \leq \mu_0$ ескере отырып, ε_0 аз шамасын таңдау арқылы аламыз.

$y(\tau)$ функциясы $[0, T]$ шенелгендіктен, $I_3(t)$ бағалауы $I_2(t)$ бағалауына ұқсас алынады.

$I_4(t)$ мүшесі [113] жұмыстағы 3.3 - теоремасының бірінші (1.3) шарттарына ұқсас бағаланады. $I_1(t)$ бағалау әдісімен бірдей болады.

(3.1.36) бағалауды қанағаттандыру үшін (3.1.33) мүшелерінің жеткілікті аз болуына берілген $\eta > 0$ үшін n және T_0 жеткілікті үлкен етіп таңдап аламыз. n және T_0 бекітілгеннен кейін, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ үшін $\varepsilon_0 > 0$ түрінде таңдаймыз. $t \in [0, T_0]$ үшін (3.1.32), (3.1.33) және (3.1.35) мүшелері жеткілікті түрде аз болады. Гронуолла теңсіздігін қолдану арқылы дәлелдеуді аяқтаймыз.

Жоғарыда келтірілген 3.1.1 - теоремасының дәлелдеуін қарастырамыз.

Дәлелдеу. $\eta > 0$ -ні $\eta > \frac{\rho}{2}$ болатындай етіп таңдаймыз және оны бекітеміз. $\{x_n(t,\varepsilon)\}$ функционалдық тізбегін келесі түрде құрайық: әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $x_0(t) = x_0$ және $x_n(t,\varepsilon)$ Коши есебінің шешімі сияқты периодты анықталады

$$\dot{x}_n = \varepsilon X\left(t, x_n, \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi\big(t, s, x_{n-1}(s,\varepsilon)\big)ds\right). \qquad (3.1.37)$$

3.1.2 теореманың дәлелдемесі сияқты, (3.1.4) арқылы барлық $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ үшін $\{x_n(t,\varepsilon)\}$ тізбегі $n \to \infty$ ұмтылғанда $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ қатысты бірқалыпты жинақталатындығын көрсете аламыз және оның $x(t,\varepsilon)$ шекті функциясы

(3.1) теңдеу үшін $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ кесіндісінде $x(0) = x_0$ Коши есебінің жалғыз шешімі болады. Келесі бағалау $\{x_n(t,\varepsilon)\}$ функциясы үшін орынды екендігі анық

$$|x_n(t_2,\varepsilon) - x_n(t_1,\varepsilon)| \le \varepsilon M |t_2 - t_1|. \tag{3.1.38}$$

Сонымен қатар,

$$\dot{x}_1(t,\varepsilon) = \varepsilon X\left(t, x_1(t,\varepsilon), \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \varphi(t,s,x_0)ds\right), \tag{3.1.39}$$

$$x_1(0,\varepsilon) = x_0,$$

жүйесі, 3.1.1 - лемма шарттарын қанағаттандыратын, Орталау леммасындағы $a(t,\varepsilon) = x_0$ функциясымен (3.1.24) түрдегі жүйе болып табылады. Осылайша, таңдалған η үшін $\varepsilon_0 \le \bar{\varepsilon}$ бар болса, онда $\varepsilon < \varepsilon_0$ үшін

$$|y(\varepsilon t) - x_1(t,\varepsilon)| \le \eta \le \frac{\rho}{2}, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \tag{3.1.40}$$

бағалауы орындалады.

(3.1.38) арқылы, $x_1(t,\varepsilon)$ функциясы жоғарыда көрсетілген A_K класына тиісті және $K = M$ бар болады. Демек, $x_2(t,\varepsilon)$ анықтауға арналған теңдеулер жүйесі, $a(T,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon)$ бар, (3.1.24) түрдегі жүйесі болып табылады. Сондықтан, $\varepsilon \le \varepsilon_0$ үшін $x_2(t,\varepsilon)$ функциясы (3.1.38) теңсіздікті де қанағаттандырады.

Енді әрбір n үшін $a(t,\varepsilon) = x_{n-1}(t,\varepsilon)$ орнату арқылы барлық $x_n(t,\varepsilon)$ функциялары, $K = M$ бар болғанда, (3.1.20) қанағаттандырады деген қорытындыға келеміз және демек, барлық $\varepsilon \le \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, M)$ үшін

$$|x_n(t,\varepsilon) - y(\varepsilon t)| \le \eta \le \frac{\rho}{2}, t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \tag{3.1.41}$$

орынды болады. Сондықтан барлық n үшін бірдей ε_0 таңдай аламыз. (3.1.41) теңсіздікте әрбір $\varepsilon \le \varepsilon_0$ үшін $n \to \infty$ ұмытылып және $x_n(t,\varepsilon)$ функциясының

$x(t,\varepsilon)$ функциясына жинақтылығын ескере отырып, 3.1.1 - теоремасың тұжырымын аламыз.

3.2 Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімі

(3.1)-(3.3) шеттік есебі үшін келесі тұжырымдама орынды болады.

3.2.2 - теорема. *3.1.1 - теоремасының (1.1)-(1.3) шарттары орындалсын.* $(3.1.5)-(3.1.6)$ *орталау шеттік есебінің* $y=y(\tau)=y(\varepsilon t)$ *шешімі* $X_0(x)$, $F(x,y)$ *функцияларының* $\frac{\partial X_0(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, *және* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *үзіліссіз дербес туындылары бар болатын кейбір* D *облысының* ρ*-аймағына тиісті болады делік және*

$$det\frac{\partial F_0(x_0)}{\partial x_0}\neq 0, \tag{3.2.1}$$

мұндағы $x_0=y(0)$, $F_0(x_0)=F_0\big(x_0,y(T,x_0)\big)$ *болады.*

Онда $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *үшін (3.1.2)-(3.1.3) шеттік есебінің* $x(t,\varepsilon)$ *шешімі болатын* $\varepsilon_0>0$ *бар болады және*

$$|x(t,\varepsilon)-y(\varepsilon t)|\leq\xi(\varepsilon), t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right] \tag{3.2.2}$$

орындалатындай $\xi=\xi(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$ *функциясын орнатуға болады.*

Дәлелдеу. $y(\tau)=y(\varepsilon\tau)$ шеттік есебінің (3.4)-(3.6) шешімі болсын. (1.4) бойынша $t\in[0,T]$ үшін шешімі D облысының кейбір ρ аймағына тиісті болады.

$x_0=y(0)$ бұл шешімнің бастапқы мәні делік. (3.1)-(3.3) шешімін келесі

$$x(t,\varepsilon)=x(t,x_0+\bar{x},\varepsilon) \tag{3.2.3}$$

түрде іздейміз, мұндағы $\bar{x}$ нөлге жақын маңайдан таңдалады. Орталау есебінің $y(\tau,x_0+\bar{x})$, $y(0,x_0+\bar{x})=x_0+\bar{x}$ шешімін қарастырайық. Әрі қарай (3.1.4) шарт пен (3.4) орталау жүйесінен, $X_0(x)$ функциясы $L\leq 1$ тұрақтысымен Липщиц шартын қанағаттандыратындығы шығады (есептің қойылымына байланысты, T бекітілген).

Гронуолла леммасы бойынша келесі

$$|y(\tau) - y(\tau, x_0 + \bar{x})| \le |\bar{x}|e^{LT} \tag{3.2.4}$$

бағалауы $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ функциясы D шекарасына жеткенше орындалады. Сондықтан, егер

$$|\bar{x}| < \frac{\rho}{2} e^{-LT} \tag{3.2.5}$$

болса, онда $\tau \in [0, T]$ үшін $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ шешімі бар және $y(\tau)$ функциясының $\frac{\rho}{2}$ аймағына тиісті болады. Демек, $y(\tau, x_0 + \bar{x})$ функциясы оның $\frac{\rho}{2}$-аймағымен D облысында жатады. (3.2.3) теңдіктегі белгісіз $\bar{x}$ параметрін

$$F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right) = 0 \tag{3.2.6}$$

теңдеуі арқылы анықтаймыз. 3.1.1 теоремасы $x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon)$ шешіміне орындалатынын ескеруіміз керек. Сондықтан, $\varepsilon > 0$ үшін жеткілікті түрде аз, $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ кесіндісінде $x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon)$ бар болады. Сонымен қатар, кез келген $\eta > 0$ үшін $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ бар, сондықтан $\varepsilon_0(\eta) > 0$ үшін келесі бағалау

$$|x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon) - y(\varepsilon t, x_0 + \bar{x})| \le \eta(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0 \tag{3.2.7}$$

орынды болады.

Осыдан $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ үшін $\bar{x}$ қатысты $F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right)$ түрлендіруі $B_r(0)$ шарында бірмәнді анықталған, мұндағы $r \le \frac{\rho}{2} e^{-LT}$.

$x_0 + \bar{x}$ және $x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)$ нүктелері $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ үшін $y(\tau)$ функциясының ρ аймағына тиісті екендігін ескереміз.

Онда, $F(x, y)$ функциясына жүктелген (1.4) шартына байланысты $N(r) > 0$ тұрақтысы бар, $\bar{x} \in B_r(0)$ үшін $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}\right\| \le N(r)$ және $\left\|\frac{\partial F}{\partial y}\right\| \le N(r)$ орынды болады.

$F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right)$ келесі түрде көрсетейік:

$$F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right) = F\left(x_0 + \bar{x}, x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0 + \bar{x}, \varepsilon\right)\right) -$$

$$-F\big(x_0+\bar{x}, x(T, x_0+\bar{x})\big)+F\big(x_0+\bar{x}, y(T, x_0+\bar{x})\big)-$$

$$-F\big(x_0, y(T, x_0)\big)=R_1(\bar{x},\varepsilon)+M_1(\bar{x},\varepsilon).$$

$R_1(\bar{x},\varepsilon)$ үшін

$$|R_1(\bar{x},\varepsilon)|\leq N(r)\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, x_0+\bar{x},\varepsilon\right)-y(T, x_0+\bar{x})\right)\leq N(r),$$

$$\eta(\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0 \qquad (3.2.8)$$

бағалауы (3.2.7) сәйкес орындалады.

3.2.2-теоремасы шарттарына сәйкес орталау есебін шешу бастапқы мәндерінде бірқалыпты тәуелді болады. Сондықтан

$$M_1(\bar{x},\varepsilon)=\left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial x}+\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial x_0}\right)\bar{x}+$$

$$+\int_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\bar{x}, y(T,x_0+s\bar{x})\big)}{\partial x}-\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial x}\right)\bar{x}ds+$$

$$+\int_0^1\left(\frac{\partial F\big(x_0+s\bar{x}, y(T,x_0+s\bar{x})\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T,x_0+s\bar{x})}{\partial z}\bigg|_{z=x_0+s\bar{x}}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial z}\bigg|_{z=x_0}\right)\bar{x}ds=$$

$$=\left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial x}+\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(T,x_0)}{\partial z}\bigg|_{z=x_0}\right)\bar{x}+$$

$$+R_2(\bar{x})\bar{x}+R_3(\bar{x})\bar{x}. \qquad (3.2.9)$$

(3.2.9) әрбір мүшесін бөлек қарастырайық. (3.2.1) шарттағы $F_0(x_0)$ белгілеуін пайдаланып, бірінші мүшесін келесі түрде көрсетеміз

$$\left(\frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial x} + \frac{\partial F\big(x_0, y(T,x_0)\big)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(T,x_0)}{\partial z}\bigg|_{z=x_0}\right)\bar{x} = \frac{\partial F_0}{\partial x_0}\bar{x}.$$

$R_2(\bar{x})$ қатысты, $|\bar{x}| \leq r$ үшін дербес туындылардың бірқалыпты үздіксіздігі мен (3.2.4) арқылы

$$|R_2(\bar{x})| \leq \delta(r) \to 0, r \to 0, \tag{3.2.10}$$

бағалауын аламыз, мұндағы $r \leq \frac{\rho}{2}e^{-LT}$.

$R_3(\bar{x})$ бағалауы үшін $\frac{\partial y(T,z)}{\partial z}$ туындысы бастапқы мәндерге қатысты сызықтық вариациялық теңдеуін қанағаттандырады және бұдан z параметрінің үздіксіз функциясы. Яғни, жоғарыда келтірілгендей, $|\bar{x}| \leq r$ үшін

$$|R_3(\bar{x})| \leq \delta_1(r) \to 0, r \to 0, \tag{3.2.11}$$

бағалауын аламыз.

Енді, $\bar{x}$-ді анықтауға арналған (3.2.6) теңдеу келесі түрде анықталады

$$|\bar{x}| = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1}\left(R_1(\bar{x},\varepsilon) + \big(R_2(\bar{x}) + R_3(\bar{x})\big)\bar{x}\right),$$

$$\bar{x} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x},\varepsilon), \tag{3.2.12}$$

мұндағы $M(\bar{x},\varepsilon)$

$$|M(\bar{x},\varepsilon)| \leq N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)\bar{x} \tag{3.2.13}$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $\eta(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ \delta_2(r),\ r \to 0.$

$C = \left\|\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1}\right\|$ делік. r-ді таңдаймыз, сондықтан

$$\delta_2(r) \leq \frac{1}{2} \tag{3.2.14}$$

болады және содан кейін $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ болатындай аламыз

$$\eta(\varepsilon) \le \frac{r}{2CN(r)}. \tag{3.2.15}$$

Онда, $|\bar{x}| \le r$ үшін (3.1.34) теңсіздіктен

$$\left\| \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x}, \varepsilon) \right\| \le C(N(r)\eta(\varepsilon) + \delta_2(r)|\bar{x}|) \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

аламыз. Осылайша, егер (3.2.14) және (3.2.15) орындалса, онда $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x}, \varepsilon)$ $B_0(r)$ шарын өзіне айналдырады. 3.1.2 теорема бойынша, $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ аралығында жалғыз және $\bar{x}$ қатысты тәуелді үзіліссіз болатын, $x(t, x_0 + \bar{x}, \varepsilon)$ шешімі бар. Демек, $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)^{-1} M(\bar{x}, \varepsilon)$ бірмәнді анықталған және үзіліссіз болады. Брауэр теоремасы бойынша, $(3.1) - (3.3)$ шеттік есебі шешімінің бастапқы мәндері болатын $\bar{x}^* = \bar{x}^*(\varepsilon, r)$ бекітілген нүктесі бар.

Енді r-ді ε параметрінің функциясы ретінде таңдайық, сонда $r(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$ болады. Содан кейін (3.2.8) бағалаудан $\eta(\varepsilon)$ функциясы келесі теңсіздікті қанағаттандыратындай етіп $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ таңдаймыз

$$\frac{\eta(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} \le \frac{1}{2CN\big(r(\varepsilon)\big)}.$$

Бұндай таңдау мүмкін екендігін ескеру керек, себебі $\frac{\partial F}{\partial x}$ және $\frac{\partial F}{\partial y}$ дербес туындылары $B_0(r)$ шарынды шенелген $N\big(r(\varepsilon)\big)$ функциясы $r(\varepsilon)$ кішірейгенде өспейді. (3.1.16) бағалау (3.2.4) бен (3.2.7)-ден шығады. Теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы және шеттік есептерді зерттеу мен шешу әдістері қарастырылған. Интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулерінің шеткі есептері диссертациялық жұмыстың негізгі объектісі болып табылады.

Алынған негізгі нәтижелер:

- параметрлері бар интегралдық бөлігі сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды;
- параметрлері бар сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері және олардың сандық жүзеге асырылуы үшін арнайы Коши есебін шешудің итерациялық әдістері қолданылды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуінің Δ_N жалпы шешімі және оның қасиеттері анықталды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есебін шешуді параметрлеу әдісін қолданды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін сызықтық емес шеттік есептерді шешу және олардың сандық жүзеге асырылды;
- Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есебінің оқшауланған шешімінің жеткілікті шарттары алдынды;
- сызықтық емес интегралдық бөлігі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есептің шешімділік шарттары алынды;
- сызықтық емес арнайы Коши есептері мен сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы жуықтауларды табылды;
- сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Коши және шеттік есептері шешімдерінің болуын зерттеуге арналған орталау әдісі негіздемесі жасалды.

Интегралдық бөлігі сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық емес шеттік есептер толығымен шығарылды және сызықтық емес Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін Коши есебі мен шеттік есепке негізделген орталау әдісі қарастырылды.

Жұмыста алынған нәтижелер теориялық мәнге ие және фредгольмнің интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеткі есептерді шешуде, сондай-ақ университеттердің математика факультеттерінде элективті курстар оқу кезінде, гранттық қаржыландыру бойынша ғылыми жобалар дайындау барысында қолдануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Volterra V. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles. – Paris, 1913. – 164 p.

2 Volterra V. Theorie of functionals and of Integral and integro-differential equations. – London, 1931. – 240 p.

3 Tomson J. Application of dinamics to physics and chemestry. – London; New-York, 1888. – 324 p.

4 Ферле Л. Критические числа оборотов ротора определенной форме с учетом гироскопического эффекта // Механика. Период. сб. переводов иностр. ст. – 1956. – №6(40). – С. 135-139.

5 Klöppel H., Lie K.N. Lie. Lotrechte Swingungen von Hangebrücken // Ingenieur-Archiv. – 1942. – Vol. 13. – P. 211-266.

6 Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. – М.; Л.: Физматлит, 1961. – 551 с.

7 Выпов Г.П. Нестандартное движение вязкой несжимаемой жидкости между близко расположенными движущимися поверхностями // Изв. ВУЗов. Математика. – 1958. – №3. – С. 41-49.

8 Volpert V. Elliptic Partial Differential Equations. – Villeurbanne: Springer Basel, 2014. – Vol. 2. – 784 p.

9 Kythe P.K., Puri. P. Computational methods for linear integral equations. – New Orleans: Univ. of New Orleans, 1992. – 528 p.

10 Kean J.M., Barlow N.D. A spatial model for the succesful biological control of sitona discoidens by microctonus aethiopoides // The Journal of Applied Ecology. – 2001. – Vol. 38. – P. 162-169.

11 Thilme H.R. A model for the spatio-spread of an epidemic // J. Math. Biol. – 1977. – Vol. 4. – P. 337-351.

12 Alownel A., Al-Khaled K. and Al-Towiq M. Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications // International Journal of Computer Mathematics. – 2009. – Vol. 87, №7. – P. 1538-1554.

13 Wazwaz A.M. A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations // Applied Mathematic and Computation. – 2006. – Vol. 181, №2. – P. 1703-1712.

14 Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 327 с.

15 Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ, – 1934. – Вып. 190. – С. 1-25.

16 Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 274 с.

17 Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. – 356 с.

18 Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Изд-во Санат, 1997. – 195 с.

19 Касымов К.А. Асимптотика решения задачи с начальным скачком для 115 нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной // Изв. Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1968. – №5. – С. 69-72.

20 Дауылбаев М. К., Касымов К. А. О сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях с особенностями // Изв. АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1990. – №5. – С. 18-23.

21 Дауылбаев М.К., Касымов К.А. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, №6. – С. 822-830.

22 Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Изд-во Казак университетi, 1999. – 170 с.

23 Dauylbaev, M.K., Mirzakulova, A.E. Boundary-Value Problems with Initial Jumps for Singularly Perturbed Integrodifferential Equations//Journal of Mathematical Sciences (United States), 2017, 222(3), p 214–225

24 Быков Я.В., Танкиев И.А. Об одной обобщенной краевой задаче для счетной системы интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям: сб. ст. – Фрунзе: Илим, 1982. – Вып. 15. – С. 44-62.

25 Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Записки Ленинградского горного института. – Л.; М., 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 161-176.

26 Виграненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Записки Ленинградского горного института. – 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 177-187.

27 Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 100, №5. – С. 849-852.

28 Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. – 1961.

– №4(23). – С. 8-24.

29 Васильев В.В., Лобов В.В. О фундаментальных решениях системы линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния: сб. ст. – Иркутск, – 1976. – Вып. 4. – С. 260-269.

30 Николенко В.Н . Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, вып. 5(51). – С. 225-228.

31 Ландо Ю.К. О функции Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра // Уч. зап. Минского пед. ин-та. – 1958. – Вып. 9. – С. 21-27.

32 Ландо Ю.К. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, №4. – С. 695-697.

33 Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Акад. наук Киргиз. ССР. Ин-т физики, математики и механики, 1962. – 184 с.

34 Кривошеин Л.Е. К решению одной задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии: сб. ст. – Фрунзе: Изд-во АН Киргиз. ССР, 1961. – Вып. 1. – С. 177-189.

35 Samoilenko A.M., Boichuk A.A., and Krivosheya S.A. Boundary value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukr. Math. Zh. – 1996. – Vol. 48, №11. – P. 1576-1579.

36 Bratu M. Sur les equations mixtes lineaires. – Paris: Comptes Rendus, 1909. – 148 p.

37 Шароглазов В.С., Васильев В.В. Об одном методе приближенного решения краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния: сб. ст. – Иркутск, 1975. – Вып. 3. – С. 212-217.

38 Крамаровский Б. И. Существование и единственность решения двухточечной краевой задачи // Вопросы вычисл. и прикл. матем: сб. ст. – Ташкент, 1977. – Вып. 46. – С. 9-23.

39 Лобов В.В. Построение фундаментальной матрицы-решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния: сб. ст. – Иркутск, 1978. – Вып. 5. – С. 94-101.

40 Вайникко Г.М. О сходимости квадратурно-разностных методов для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11, №3. – С. 770-776.

41 Фодчук О.В. Вариационно-итеративный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений // Методы исследования

диф. и функц.-диф. уравн. АН ССР. Ин-т матем: сб. ст. – Киев, 1990. – С. 101-109.

42 Клименко Р.К. Методы расщепления решения линейных неоднородных задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений // Автоматиз. научн. исслед. и испыт. АН СССР: сб. ст. – М., 1990. – С. 28-34.

43 Артыков А.Ж. Условия разрешимости краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям: сб ст. – Бишкек: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 110-113.

44 Сарыгулов К. С. Приближенное решение одного класса обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений методом конечных элементов // Исслед. по интегро-дифференц. уравн. – 1983. – Вып. 16. –С. 140-145.

45 Еремин А.С., Андреев А.А. Краевая задача для уравнения с матричным интегро-дифференциальным оператором // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. – 2004. – №26. – С. 5-10.

46 Власов В. В. О некоторых краевых задачах для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Функц.-диф. ур-ния: сб. ст. – *Кедумим*, 1987. – С. 124-133.

47 Arqub O.A., Al-Smadi M. Numerical algorithm for solving two-point, second-order periodic boundary value problems for mixed integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2014. – Vol. 243. – P. 911-922.

48 Berenguer M.I., Gamez D., Lopez Linares A.J. Fixed point techniques and Schauder bases to approximate the solution of the first order nonlinear mixed Fredholm–Volterra integro-differential equation // J. Comput. Appl. Math. – 2013. – Vol. 252. – P. 52-61.

49 Bothayna S.H. Kashkaria, Muhammed I. Syam. Evolutionary computational intelligence in solving a class of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 311. – P. 314-323.

50 Kheybari S., Darvishi M.T., Wazwaz A.M. A semi-analytical algorithm to solve systems of integro-differential equations under mixed boundary conditions // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 317. – P. 72-89.

51 Maleknejad K., Basirat B., Hashemizadeh E. Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2011. – Vol. 61. – P. 2821-2828.

52 Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions:

Degenerate and non-degenerate kernels // J. Comput. Appl. Math. – 2015. – Vol. 282. – P. 34-43.

53 Momani S., Arqub O.A., Hayat T., Al-Sulami H. A computational method for solving periodic boundary value problems for integro-differential equations of Fredholm–Volterra type // Appl. Math. Comput. – 2014. – Vol. 240. – P. 229-239.

54 Parts I., Pedas A., Tamme E. Piecewise polynomial collacation for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels // SIAM. J. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 43. – P. 1897-1911.

55 Turkyilmazoglu, M. High-order nonlinear Volterra–Fredholm-Hammerstein integro-differential equations and their effective computation // Appl. Math. Comput. – 2014. – Vol. 247. – P. 410-416.

56 Yüzbasi, S. A collocation method based on Bernstein polynomials to solve nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2016. – Vol. 273. – P. 142-154.

57 Yulan W., Chaolu T., Ting P. New algorithm for second order boundary value problems of integro-differential equation // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – Vol. 229. – P. 1-6.

58 Zarebnia M., Ali Abadi M.G. Numerical solution of system of nonlinear second-order integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2010. – Vol. 60. – P. 591-601.

59 Zeinali M., Shahmorad S. An equivalence lemma for a class of fuzzy implicit integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327. – P. 388-399.

60 Zhao, J. Compact finite difference methods for high order integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2013. – Vol. 221. – P. 66-78.

61 Zhao J., Corless R.M. Compact finite difference method for integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 177. – P. 271-288.

62 Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. – Beijing; Berlin, 2011. – 639 p.

63 Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

64 Bainov D.D., Simeonov P.S. Integral Inequalities and Applications. – Amsterdam: Springer Science and Business Media, 1992. – 245 p.

65 Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. – Berlin: Birkhauser Verlag, Baseletc., 1993. – 391 p.

66 Lakshmikantham V., Rao M.R.M. Theory of Integro-Differential Equations. – London: Gordon and Breach, 1995. – 375 p.

67 Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier Inc. All rights reserved, 2016. – 254 p.

68 Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Boston: VSP, Utrecht, 2004. – 317 p.

69 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294. – P. 342-357.

70 Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010 – Vol. 50, №7. – P. 1150-1161.

71 Dzhumabaev D.S. An Algorithm for Solving a Linear Two Point Boundary Value Problem for an Integrodifferential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 53, №6. – P. 736-758.

72 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Well-Posedness of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2010. – Vol. 46, №4. – P. 553-567.

73 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, №9. – P. 1-16.

74 Dzhumabaev D.S. Conditions for the Solvability of Linear Boundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 66, №8. – P. 1200-1219.

75 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327. – P. 79-108.

76 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.

77 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1. – С. 96-105.

78 Нахушев А. М. Уравнения мат. биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 205 с.

79 Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы, 1995. – 269 с.

80 Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. –

2004. – Т. 44, №9. – С. 1585-1595.

81 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – №43. – P. 1788-1802.

82 Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Meth Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41, №4. – P. 1439-1462.

83 Dzhumabaev D.S. New general solutions to ordinary differential equations and methods for solving boundary value problems // Ukrainian Math. J. – 2019. – Vol. 71, №7. – P. 884-905.

84 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Численная реализация одного алгоритма нахождения решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, №4(66). – С. 25-36.

85 Джумабаев Д.С., Мынбаева С.Т. Об одном алгоритме нахождения численного решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия МКТУ имени Х.А. Яссави. Серия математика, физика, инфооматика. – 2018. – Т. 2, №1(4). – С. 44-46.

86 Mynbayeva S.T. The existence of a solution to the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 19, №1. – P. 69-81.

87 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, №4. – P. 24-33.

88 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. One approach to solve a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2020. – №2020-97-1. – P. 27-36.

89 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 752 с.

90 Ortega J.M., Rheintboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – Philadephia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. – 599 p.

91 Kelley C.T. Solving nonlinear equations with Newton's method. – Philadelphia: SIAM Publ., 2003. – 119 p.

92 Deuflhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems. – Berlin: Heidelberg, 2011. – 437 p.

93 Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, №5. – P. 356-361.

94 Джумабаев Д.С. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, №1. – С. 13-29.

95 Джумабаев Д.С. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений // Известия академия наук Каз ССР. – 1988. – №5. – С. 24-28.

96 Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Математический журнал. – 2001. – Т. 1, №1. – С. 30-40.

97 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. Math. Phys. – 2007. – №47. – P. 37-61.

98 Boichuk A.A. and Golovatska I.A. Boundary value problems for integro-differential equations Nonlinear Oscillations – 2013 - Vol.16, No.3. – P.460–474.

99 Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Journal of Integral Equations and Applications. – 2021. – Vol. 33 – No.1. – P. 53–75.

100 Mynbayeva S.T. An approximate solution to quasilinear boundary value problems for Fredholm integro-differential equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20. – №4.-P. 133-143.

101 Самойленко А.М., Петришин Р.И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, №6. – С. 956-964.

102 Митропольский Ю.А., Байнов Д.Д., Милушева С.Д. Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений // Мат. физика. – 1979. – Вып. 25. – С. 3-22.

103 Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука., 1976. – 152 с.

104 Assanova A.T., Zhumatov S.S., Mynbayeva S.T., Karakenova S.G. On solvability of boundary value problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Bulletin of the Karaganda Univercity. – 2022. – Vol. 105 – No.1.– P. 25–34.

105 Karakenova S. On the solution of the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations// Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан: Тезисы докладов / г. Алматы, (3-5 апрель 2019). – Алматы, 2019. - С.97-98.

106 Karakenova S.G. On solution to the special Cauchy problem for Fredholm integro-differential equations with nonlinear integral part// International Conference of Young Mathematician / Kyiv, (6-8 June 2019). – Kyiv, 2019. - P. 30.

107 Karakenova S. Approximate method for solving special Cauchy problem for nonlinear integro-differential equation // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Тезисы докладов / г. Алматы, (3-5 апрель 2020). – Алматы, 2020. - С.121-122.

108 Dzhumabaev D.S., Karakenova S.G. An iterative method for solving the special Cauchy problem for the system of nonlinear integral part // Kazakh Mathematical Journal. - 2019. – Vol.19. – No.2. - P. 49-58.

109 Kadirbayeva Zh.M, Karakenova S.G. Numerical solution of multi-point boundary value problems for essentially loaded ordinary differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2020.-Vol.20. – No.4. - P. 47–57.

110 Stanzhitskii A.N., Karakenova S., Zhumatov S.S. On a comparison theorem for stochastic integro-functional equations of neutral type // al-Farabi Kazakh National university BULLETIN. Journal of mathematics, mechanics and computer science. - 2020. – Vol. 105. – No.1 – P. 30-45.

111 Stanzhitskii A.N., Karakenova S.G., Uteshova R.E. Averaging Method and Boundary Value Problems for Systems of Fredholm Integro-Differential Equations // Nonlinear Dynamics And Systems Theory. – 2021.- Vol.20. – No. 1. - P. 100-113.

112 Assanova, A.T., Mynbayeva, S.T., Karakenova S.G., Uteshova R.E. A solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Quaestiones Mathematicae - Published online: 09 Mar 2023.

113 Mynbayeva S., Karakenova S. On one approach to general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation //Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Тезисы докладов / г. Алматы, (4-8 апрель 2020). – Алматы, 2022. - С.149-150.

114 Dzhumabaev D.S. On the convergence of a modification of the Newton-Kantorovich method for closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 95-99.

115 Dzhumabaev D.S. On the solvability of nonlinear closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 91-94.

116 Dzhumabaev D.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Linear Doundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equation. Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol.66. – No.8- P. 1200-1219.

117 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 249 с.

118 Filatov N. Averaging in systems of integral and integro-differential equations. In: Research in analytical mechanics. Nauka, Tashkent, 1965 – P.135–179. [in Russian]

119 Nosenko T.V. and Stanzhytskyi O.M. Averaging method in some problems of optimal control // Nonlinear Oscill. - 2008-No.11-P.539–547.

120 Stanzhitskii A.N. and Dobrodzii T.V. Study of optimal control problems on the half-line by the averaging method // Diff. Equat. – 2011.-Vol.47, No. 2. – P. 264–277.

121 Martynyuk A.A. Analysis of a set of trajectories of generalized standard systems: averaging technique // Nonlinear Dyn. Syst. Theory - 2017- Vol.17, No. 1. - P. 29-41.

122 Al-Omari J.F. M. and Gourley S.A. A nonlocal reaction-diffusion model for a single species with stage structure and distributed maturation delay. // European J. Appl. Math. - 2005 –№16 – P.37–51.

123 Boichuk A.A. and Golovatska I. A. Weakly nonlinear systems of integro-differential equations. Nonlinear Oscillations- 2013- Vol.16, No.3. - P. 314–321.

124 Kythe P.K. and P. Puri. Computational Methods for Linear Integral Equations - New Orleans: Univ. of New Orleans, 1992.

125 Filatov A.N. and Umarov A.G. On averaging method in systems of integro-differential equations // Reports of Academy of Sciences - Uzbek SSR, 1985- 327 (6) – P.12–14. [in Russian]

126 Samoilenko A.M., Boichuk A.A. and Krivosheya S.A. Boundary value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukrainian Math. J. – 1996 - Vol.48, No. 11 - P. 1576–1579.

127 Filatov A.N. and Sharova L.V. Integral Inequalities and Theory of Nonlinear Oscillations - Moscow: Nauka, 1976. [in Russian]

128 Samoilenko A.M. and Petrishin R.I. Averaging method in some boundary value problems // Diff. Equat. – 1989. – Vol. 25, No. 6. – P. 956–96.

129 Mitropolsky Yu.A. Averaging Method in Nonlinear Mechanics - Kiyv: Naukova Dumka, 1971. [in Russian]

130 Mitropolsky Yu.A., Bainov D.D. and Milusheva S.D. Application of averaging method in solving boundary value problems for ordinary differential equations and integro-differential equations // Math. Physics – 1979 – No.25. P. 3–22. [Russian]

131 Stanzhytskyi A.N., Mynbayeva S.T. and Marchuk N.A. Averaging in boundary value problems for systems of differential and integro-differential equations // Ukrainian Math. J.- 2020.- No.72. – P. 277–301.

132 Boichuk A.A. and Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and

Fredholm Boundary - Value Problems. -USP, Utrecht, Boston, 2004.